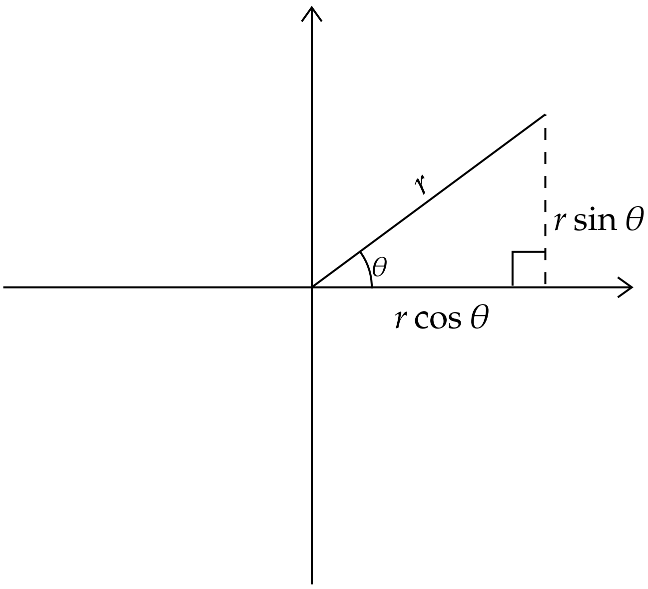
$\{$*Pembuktian Identitas Trigonometri*$\}$

Zulfaqqar Nayaka Athadiansyah

7 Mei 2022

Identitas Pythagorean: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ dan turunannya

Bukti. Misalkan suatu ruas garis dengan panjang r dengan kemiringan θ terhadap sumbu-x positif pada bidang koordinat Kartesius seperti berikut:



Berdasarkan teorema Phytagoras:

$$r^2 = r^2 cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta$$

Membagi kedua ruas dengan r^2 akan memberikan

$$1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta \qquad \square$$

Membagi kedua ruas dengan $\cos^2\theta$ akan memberikan

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta \qquad \square$$

Membagi kedua ruas persamaan $1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$ dengan $\sin^2\theta$ akan memberikan kita

$$\frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\csc^2\theta = \cot^2\theta + 1 \qquad \square$$

Dari persamaan $1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$, kita bisa menurunkan identitas untuk mencari $\sin$ dan $\cos$:

$$
\begin{aligned}
1 &= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\
\cos^2\theta &= 1 - \sin^2\theta \\
\cos\theta &= \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} \quad \square
\end{aligned}
$$

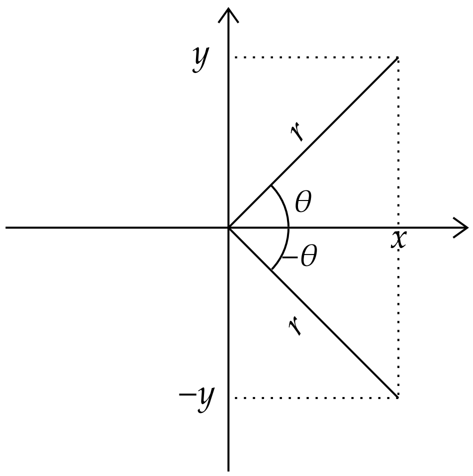
dan

$$
\begin{aligned}
1 &= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\
\sin^2\theta &= 1 - \cos^2\theta \\
\sin\theta &= \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} \quad \square
\end{aligned}
$$

Tanda $\pm$ menandakan bahwa nilai $\sin$ dan $\cos$ dapat menjadi positif atau negatif tergantung dengan sudut θ. Metode yang mirip bisa digunakan untuk menurunkan identitas untuk mencari nilai keempat fungsi trigonometri lainnya.

Kegenapan Fungsi Cosinus dan Keganjilan Fungsi Sinus

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$



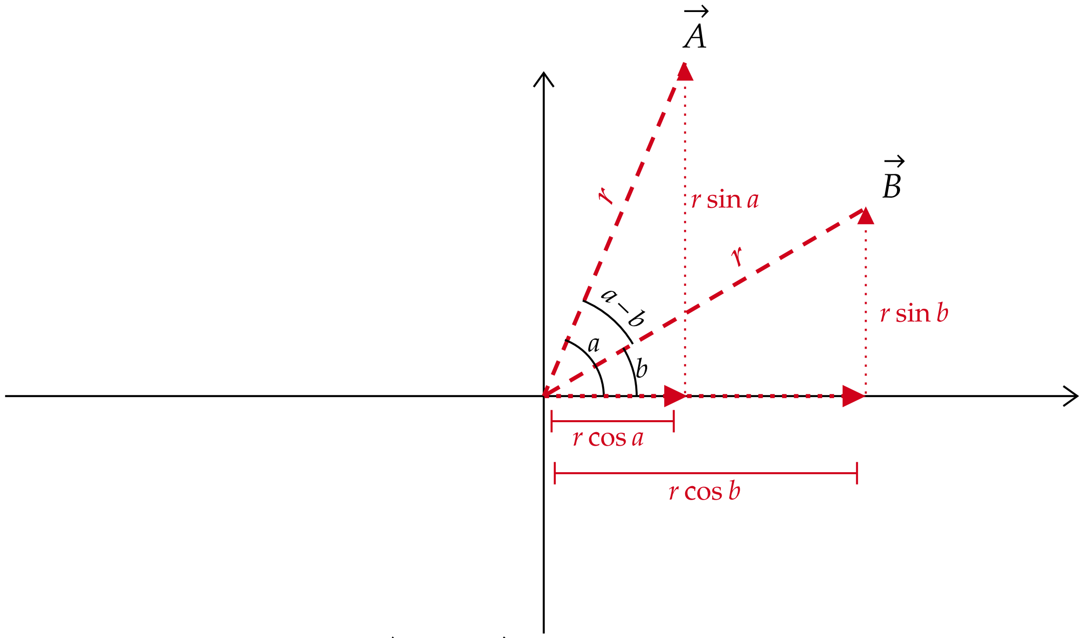
Dari gambar di atas, nampak jelas bahwa $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ dan $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$.

Lalu, $\sin(-\theta) = \dfrac{-y}{r} = -\dfrac{y}{r} = -\sin\theta$ $\square$

dan $\cos(-\theta) = \dfrac{x}{r} = \cos\theta$ $\square$

Identitas Jumlah dan Selisih Sudut: $\cos(a \pm b)$ *dan* $\sin(a \pm b)$

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$



Misalkan kita punya dua vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ yang panjang keduanya r dan secara berturut-turut membentuk sudut a dan b terhadap sumbu-x positif. Dari gambar, dapat dilihat bahwa komponen-x dan y vektor $\vec{A}$ dan vektor $\vec{B}$ secara berturut-turut adalah $(r\cos a,\ r\sin a)$ dan $(r\cos b,\ r\sin b)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \vec{A}\cdot\vec{B} &= |\vec{A}||\vec{B}|\cos(\textit{sudut apit antara keduanya}) \\ \vec{A}\cdot\vec{B} &= |r||r|\cos(a-b) \\ &= r^2\cos(a-b) \end{aligned} \tag{1}$$

Akan tetapi, hasil kali titik (*dot product*) dari dua vektor dapat dicari dengan cara lain, yakni dengan menjumlahkan hasil kali komponen-x dan hasil kali komponen-y kedua vektor tersebut:

$$\begin{aligned} \vec{A}\cdot\vec{B} &= \left(|\overrightarrow{A_x}|\cdot|\overrightarrow{B_x}|\right)+\left(|\overrightarrow{A_y}|\cdot|\overrightarrow{B_y}|\right) \\ &= (r\cos a\cdot r\cos b)+(r\sin a\cdot r\sin b) \\ &= r^2\cos a\cos b+r^2\sin a\sin b \end{aligned} \tag{2}$$

Menyamakan kedua hasil perhitungan *dot product* (Persamaan 1 & Persamaan 2) akan memberikan kita:

$$r^2\cos(a-b) = r^2\cos a\cos b+r^2\sin a\sin b$$

Membagi kedua ruas dengan r^2,

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b+\sin a\sin b \qquad \square$$

Mengganti b dengan $-b$ akan memberikan kita

$$\begin{aligned} \cos(a-(-b)) &= \cos a\cos(-b)+\sin a\sin(-b) \\ \cos(a+b) &= \cos a\cos b-\sin a\sin b \end{aligned} \qquad \square$$

karena $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ dan $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

Dengan demikian, $\cos(a\pm b) = \cos a\cos b\mp\sin a\sin b$. $\square$

$\cos(90^\circ - a) = \sin a$

Bukti. Berdasarkan identitas sebelumnya,

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - a) &= \cos 90^\circ \cos a + \sin 90^\circ \sin a \\ &= 0 \cdot \cos a + 1 \cdot \sin a \\ &= \sin a\end{aligned} \qquad \square$$

$\sin(90^\circ - a) = \cos a$

Bukti. Perhatikan bahwa $a = 90^\circ - 90^\circ + a = 90^\circ - (90^\circ - a)$. Menggunakan identitas pengurangan sudut untuk cosinus, kita dapatkan

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - (90^\circ - a)) &= \cos 90^\circ \cos(90^\circ - a) + \sin 90^\circ \sin(90^\circ - a) \\ \cos a &= 0 \cdot \cos(90^\circ - a) + 1 \cdot \sin(90^\circ - a) \\ \cos a &= \sin(90^\circ - a)\end{aligned} \qquad \square$$

$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$

Bukti.

$$\begin{aligned}\sin(a - b) &= \cos(90^\circ - (a - b)) \\ &= \cos(90^\circ - a + b) \\ &= \cos((90^\circ - a) + b) \\ &= \cos(90^\circ - a)\cos b - \sin(90^\circ - a)\sin b \\ &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \quad \square\end{aligned}$$

Mengganti b dengan $-b$ akan memberikan kita (silakan coba sendiri)

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \qquad \square$$

Dengan demikian, $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$. $\square$

Identitas Sudut Ganda: $\sin 2a$ dan $\cos 2a$

Menggunakan identitas untuk $\cos(a + b)$ dan $\sin(a + b)$ kita bisa menurunkan identitas lain, yakni $\sin 2a$ dan $\cos 2a$ dengan cara memilih $b = a$.

$\sin 2a$

$$\begin{aligned}\sin 2a &= \sin(a + a) \\ &= \sin a \cos a + \cos a \sin a \\ &= 2 \sin a \cos a \quad \square\end{aligned}$$

$\cos 2a$

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos(a+a)\\ &= \cos a\cdot\cos a - \sin a\cdot\sin a\\ &= \cos^2 a - \sin^2 a \quad \square\end{aligned}$$

Berdasarkan identitas Pythagorean, $\cos^2 a = 1-\sin^2 a$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\cos 2a &= 1-\sin^2 a - \sin^2 a\\ &= 1-2\sin^2 a \quad \square\end{aligned}$$

Ketimbang mengubah $\cos^2 a$ menjadi $1-\sin^2 a$, kita bisa mengubah $\sin^2 a$ menjadi $1-\cos^2 a$ dengan berdasarkan identitas Pythagorean juga:

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \left(1-\cos^2 a\right)\\ &= \cos^2 a - 1 + \cos^2 a\\ &= 2\cos^2 a - 1 \quad \square\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{1}\\ &= \frac{\frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos^2 a}}{\frac{1}{\cos^2 a}}\\ &= \frac{1-\tan^2 a}{\sec^2 a}\\ &= \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a} \quad \square\end{aligned}$$

Identitas Prosthaphaeresis: mengubah penjumlahan dan pengurangan antara sinus atau cosinus menjadi perkalian

Identitas-identitas berikut ditemukan oleh astronom Eropa pada abad ke-16. Berasal dari kata *prosthesis* (πρόσθεσις, penjumlahan) dan *aphaeresis* (ἀφαίρεσις, pengurangan). Identitas-identitas ini dapat diturunkan dari identitas jumlah dan selisih sudut.

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$

Bukti. Dari identitas jumlah selisih sudut,

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cancel{\cos a\sin b}\\ \sin(a-b) &= \sin a\cos b - \cancel{\cos a\sin b}\\ &\text{-------------------------} \; +\end{aligned}$$

$$\sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin a\cos b \quad \square$$

$\sin(a+b)-\sin(a-b) = 2\cos a\sin b$

Bukti. Dari identitas jumlah selisih sudut,

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \cancel{\sin a\cos b}+\cos a\sin b \\ \sin(a-b) &= \cancel{\sin a\cos b}-\cos a\sin b \\ &\text{-------------------------------- } - \\ \sin(a+b)-\sin(a-b) &= \cos a\sin b-(-\cos a\sin b) \\ &= 2\cos a\sin b \quad \square \end{aligned}$$

$\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos a\cos b$

Bukti. Dari identitas jumlah selisih sudut,

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a\cos b-\cancel{\sin a\sin b} \\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b+\cancel{\sin a\sin b} \\ &\text{-------------------------------- } + \\ \cos(a+b)+\cos(a-b) &= 2\cos a\cos b \quad \square \end{aligned}$$

$\cos(a+b)-\cos(a-b) = -2\sin a\sin b$

Bukti. Dari identitas jumlah selisih sudut,

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cancel{\cos a\cos b}-\sin a\sin b \\ \cos(a-b) &= \cancel{\cos a\cos b}+\sin a\sin b \\ &\text{-------------------------------- } - \\ \cos(a+b)-\cos(a-b) &= -\sin a\sin b-\sin a\sin b \\ &= -2\sin a\sin b \quad \square \end{aligned}$$

Sekarang, kita misalkan $\alpha = a+b$ dan $\beta = a-b$.

Maka $\begin{aligned} \alpha+\beta &= a+b+a-b \\ &= 2a \end{aligned}$ sehingga $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = a$.

Selain itu, $\begin{aligned}\alpha - \beta &= a + b - (a - b)\\ &= a + b - a + b\\ &= 2b\end{aligned}$ sehingga $\dfrac{\alpha - \beta}{2} = b$.

Keempat identitas di atas dapat diganti:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Bukti. Identitas ini diturunkan dari identitas $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$.
Karena telah dimisalkan $a + b = \alpha$, $a - b = \beta$, serta $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = a$, dan $\dfrac{\alpha-\beta}{2} = b$, maka variabel dalam identitas tersebut bisa kita ganti:

$$\begin{aligned}\sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2\sin a\cos b\\ \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{aligned}$$ □

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Bukti. Identitas ini diturunkan dari identitas $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b$. Seperti sebelumnya, kita mengganti variabel-variabel dalam identitas tersebut:

$$\begin{aligned}\sin(a+b) - \sin(a-b) &= 2\cos a\sin b\\ \sin\alpha + \sin\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{aligned}$$ □

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Bukti. Identitas ini diturunkan dari identitas $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$. Seperti sebelumnya, kita mengganti variabel-variabel dalam identitas tersebut:

$$\begin{aligned}\cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2\cos a\cos b\\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{aligned}$$ □

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Bukti. Identitas ini diturunkan dari identitas $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b$. Seperti sebelumnya, kita mengganti variabel-variabel dalam identitas tersebut:

$$\begin{aligned} \cos(a+b) - \cos(a-b) &= -2\sin a \sin b \\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{aligned}$$