$\{Transformasi\ Geometri\}$

Zulfaqqar Nayaka Athadiansyah
6 Mei 2022

Translasi

- Menggeser titik atau kurva

Misalkan suatu titik $(a,\ b)$ dan garis $y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots$ digeser oleh vektor $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Secara intuitif, ini bermakna bahwa:

- absis dari titik (a, b) dan absis tiap titik pada kurva $y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots$ digeser sejauh p satuan (arah pergeseran ke kanan untuk $p > 0$, ke kiri untuk $p < 0$)
- ordinat dari titik (a, b) dan ordinat tiap titik pada kurva $y = ax^n + bx^{n-1}$ $+cx^{n-2} + \ldots$ digeser sejauh q satuan (arah pergeseran ke atas untuk $q > 0$, ke bawah untuk $q < 0$)

Misalkan (x, y) dan (x', y') secara berturut-turut adalah koordinat sebelum dan setelah translasi, maka:

$$x' = x + p$$
$$y' = y + q$$

atau, dalam notasi matriks:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \qquad \square$$

Tentunya ini mengimplikasikan bahwa

$$x = x' - p$$
$$y = y' - q$$

Mensubstitusikan ini ke dalam $y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots$ akan memberikan kita persamaan garis tersebut setelah ditranslasikan:

$$y' - q = a(x' - p)^n + b(x' - p)^{n-1} + c(x' - p)^{n-2} + \ldots$$

Tanda aksen (') bisa kita hilangkan karena tanda tersebut hanya berfungsi untuk menekankan bahwa x' dan y' adalah nilai x dan y setelah ditranslasikan:

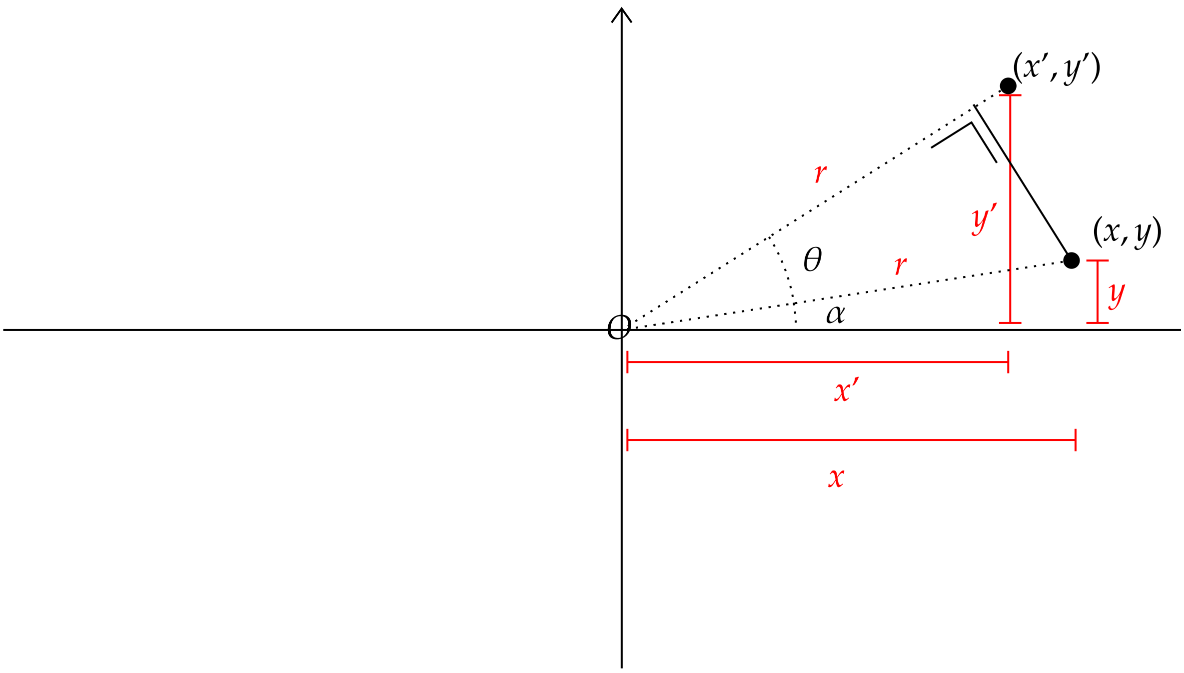
$$y = a(x-p)^n + b(x-p)^{n-1} + c(x-p)^{n-2} + \ldots + q$$

Secara umum, misalkan suatu fungsi $f(x)$ ditranslasikan oleh vektor $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ menghasilkan suatu fungsi $g(x)$. Maka $g(x) = f(x-p) + q$. ■

Rotasi

- Memutar titik atau kurva terhadap suatu titik yang disebut pusat rotasi
- Jarak dari titik atau tiap titik pada kurva terhadap pusat rotasi tidak berubah

Misalkan suatu titik $(x,\ y)$ pada bidang koordinat Kartesius dirotasikan terhadap titik asal O(0,0) dengan sudut θ menjadi titik (x', y'). α adalah sudut antara vektor posisi titik (x, y) dengan sumbu-x positif dan r adalah panjangnya.



$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha+\theta) \\ &= r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ &= x\cos\theta - y\sin\theta \end{aligned}$$

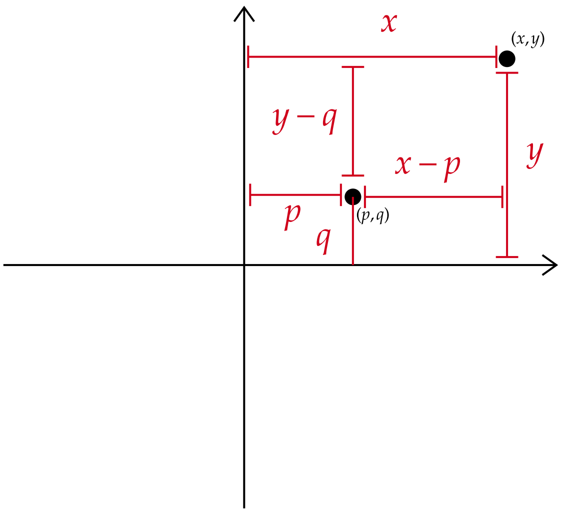
$$y' = r\sin(\alpha+\theta)$$

$$
\begin{aligned}
&= r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta \\
&= y \cos \theta + x \sin \theta \\
&= x \sin \theta + y \cos \theta
\end{aligned}
$$

atau, dengan notasi matriks:

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \square
$$

Misalkan, ketimbang dirotasikan terhadap titik asal, titik $(x,\ y)$ dirotasikan terhadap suatu titik lain (p, q) dengan sudut θ.
Idenya adalah kita pandang dulu titik (p, q) sebagai titik asal yang baru. Kalau titik (p, q) jadi titik asal yang baru, maka koordinat titik (x, y) terhadap titik asal yang baru sebagai titik asal adalah $(x - p,\ y - q)$.



Setelah itu, kita rotasikan titik $(x - p,\ y - q)$ dengan sudut θ terhadap "titik asal":

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - p \\ y - q \end{pmatrix}
$$

(x', y') adalah titik hasil rotasi $(x,\ y)$ dengan titik (p, q) sebagai acuannya. Untuk mendapatkan koordinat $(x',\ y')$ dengan titik asal sebagai acuan, kita harus mengembalikan titik asal ke tempat semula.
Jika kita memindahkan titik asal dari $(0, 0)$ ke (p, q) dengan cara mengurangi absis dan ordinat secara berturut-turut dengan p dan q, maka kita balikkan menjadi semula dengan melakukan sebaliknya:

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - p \\ y - q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \qquad \square
$$

Dilatasi

- Memperbesar jarak titik atau ukuran kurva/bangun ruang terhadap suatu titik yang disebut pusat dilatasi
- Orientasi titik atau tiap titik pada kurva terhadap pusat rotasi tidak berubah

Misalkan suatu titik $(x,\ y)$ didilatasi terhadap titik asal dengan skala faktor k. Maka jarak titik terhadap sumbu-y yang tadinya x satuan kini menjadi kx satuan, dan jaraknya terhadap sumbu-x
kini menjadi ky satuan. Dengan demikian, koordinat bayangan titik adalah $(x', y') = (kx, ky)$. Atau, dengan notasi matriks:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \square$$

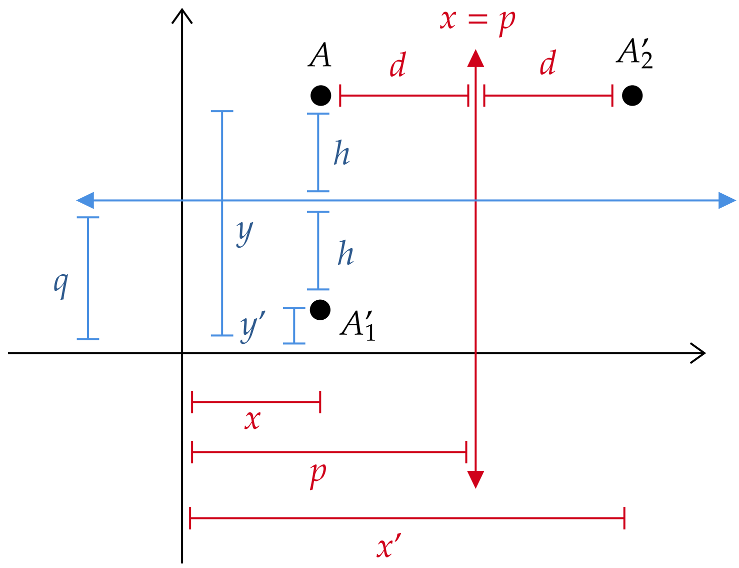
Jika titik didilatasikan terhadap suatu titik acuan (p, q), kita bisa gunakan penalaran yang sama seperti pada rotasi untuk mendapatkan

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \qquad \square$$

Refleksi

- Mencerminkan suatu titik terhadap suatu garis/titik sedemikian sehingga jarak titik asli dengan cermin dan titik bayangan dengan cermin sama.
- Titik asli dan titik bayangan berada pada satu garis lurus yang tegak lurus dengan cermin

Misalkan suatu titik $A(x,\ y)$ dicerminkan terhadap garis vertikal $y = q$ dan garis horizontal $x = p$ seperti pada gambar berikut:



Misalkan koordinat titik A_1' adalah (x', y'). Tentunya $x' = x$ karena absisnya tidak berubah. Ini dikarenakan titik A dan A_1' dicerminkan terhadap garis horizontal, sehingga garis yang dibentuk kedua titik tersebut adalah garis vertikal, yang sejajar dengan sumbu-y. Akibatnya, jarak titik A maupun titik A_1' terhadap sumbu-y sama.

Lalu, dari gambar di atas kita dapatkan suatu persamaan:

$$x = x' \tag{1}$$

$$\begin{aligned} h &= h \\ y - q &= q - y' \\ y' &= 2q - y \end{aligned} \tag{2}$$

atau, dalam bentuk matriks:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2q - y \end{pmatrix} \qquad \square$$

Penalaran yang mirip untuk kasus pencerminan A terhadap garis $x = p$ akan memberikan kita:

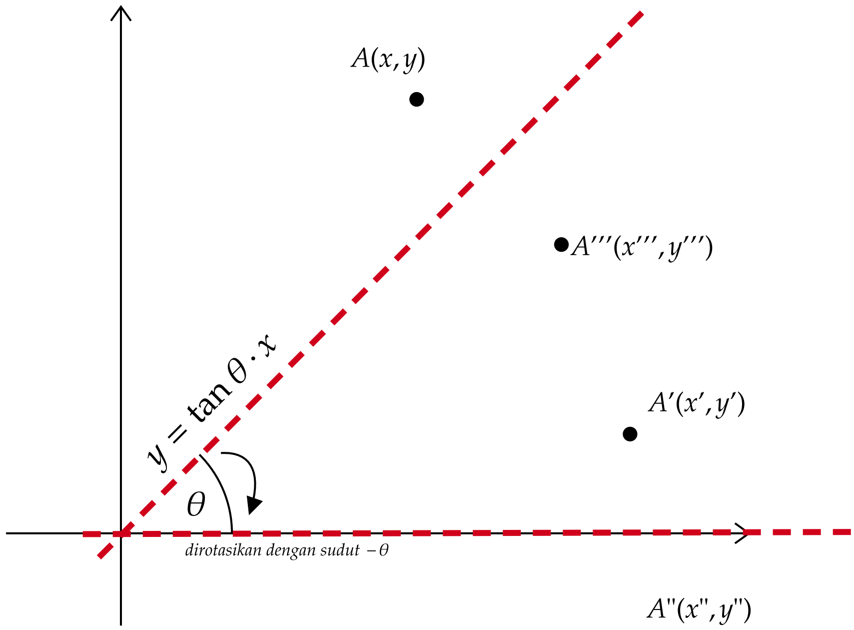
$$y' = y \tag{3}$$
$$x' = 2p - x \tag{4}$$

atau:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p - x \\ y \end{pmatrix} \qquad \square$$

Bagaimana jika kita merefleksikan dengan garis yang tidak tegak atau mendatar, melainkan miring? Bagaimana jika kita merefleksikan dengan garis $y = mx$, di mana m

adalah gradiennya $\left(m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta\right)$?



Idenya adalah pertama-tama kita rotasikan garis $y = \tan\theta \cdot x$ dan titik $A(x, y)$ dengan sudut $-\theta$ (θ searah jarum jam). Merotasikan garis $y = \tan\theta \cdot x$ dengan sudut tersebut akan menghilangkan sudutnya, sehingga garis tersebut menjadi garis horizontal $y = 0$. Sedangkan titik $A(x, y)$ akan menjadi:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Selanjutnya, kita refleksikan titik yang telah dirotasikan, $A'(x', y')$, terhadap garis $y = 0$ dengan menggunakan rumus refleksi yang telah kita turunkan tadi.

$$\begin{pmatrix} x" \\ y" \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ 2q - y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ 2(0) - y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ x\sin\theta - y\cos\theta \end{pmatrix}$$

Kita dapatkan hasil refleksinya terhadap garis $y = 0$ atau sumbu-x, yakni $A"(x", y")$. Terakhir, kita rotasikan kembali titik ini dengan sudut θ sehingga menjadi titik $A'''(x''', y''')$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x" \\ y" \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ x\sin\theta - y\cos\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} x\cos^2\theta + y\sin\theta\cos\theta - x\sin^2\theta + y\sin\theta\cos\theta \\ x\sin\theta\cos\theta + y\sin^2\theta + x\sin\theta\cos\theta - y\cos^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x\cos^2\theta - x\sin^2\theta + y\sin\theta\cos\theta + y\sin\theta\cos\theta \\ y\sin^2\theta - y\cos^2\theta + x\sin\theta\cos\theta + x\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2y\sin\theta\cos\theta \\ y\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) + 2x\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2y\sin\theta\cos\theta \\ -y\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2x\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x\cos 2\theta + y\sin 2\theta \\ -y\cos 2\theta + x\sin 2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x\cos 2\theta + y\sin 2\theta \\ x\sin 2\theta - y\cos 2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x\cos 2\theta + y\sin 2\theta \\ x\sin 2\theta - y\cos 2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \square
\end{aligned}
$$

Anda boleh coba sendiri masukkan $\theta = 45^\circ$ dan $\theta = -45^\circ$ secara berturut-turut untuk mencari matriks refleksi untuk $y = x$ dan $y = -x$.