

Soal-Bahas OSK 2022

Z. Nayaka Athadiansyah
SMA Negeri 3 Malang

Jawaban akhir ditandai $\square$. Kalian diharapkan mengerjakan sambil membaca solusi ini, bukan hanya melihat saja. Ada banyak perhitungan yang dilompati dan harus kalian lakukan sendiri. Gunakan solusi ini hanya untuk mengevaluasi pekerjaan kalian.

1. Kinematika

1. Sebuah bola dilempar ke atas secara vertikal dengan kecepatan awal $v_0 = 7$ m/s dan ketinggian $h = 5$ m. Waktu yang dibutuhkan hingga bola mencapai tanah adalah ... detik.

Jawab. Ketika bola mencapai tanah, $y = 0$. Persamaan GLBB memberikan:

$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$0 = h + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4\left(-\frac{1}{2}g\right)h}}{2\left(-\frac{1}{2}g\right)}$$

$$= \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{-g}$$

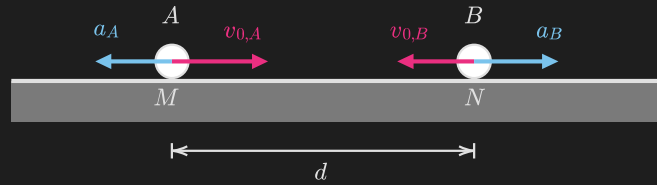
$$= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 + 2(9,8)(5)}}{-9,8}$$

Jadi, ada dua solusi untuk t :

$$t_1 = -0,5 \text{ detik} \quad \times$$

$$t_2 = 2,0 \text{ detik} \quad \square$$

2. Terdapat dua buah titik M dan N , di mana N terletak di sebelah kanan M . Tinjau sebuah partikel A yang bergerak dari titik M dengan kecepatan awal sebesar $v_{0,A} = 18$ m/s ke kanan dan percepatan konstan sebesar $a_A = 2$ m/s² ke kiri. Pada saat yang bersamaan, sebuah partikel B bergerak dari titik N dengan kecepatan awal sebesar $v_{0,B} = 12$ m/s ke kiri dan percepatan konstan sebesar $a_B = 3$ m/s² ke kanan. Gerakan kedua partikel hanya pada satu dimensi. Kedua partikel sempat berada pada posisi yang sama sebanyak dua kali dengan selang waktu antara dua kejadian tersebut sebesar $\Delta t = 4$ detik. Jarak antara titik M dan N adalah ... meter.



Jawab. Misalkan jarak antara titik M dan N adalah d . Dengan memakai titik M sebagai acuan dan mengambil kanan sebagai positif. Menggunakan $s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$, persamaan posisi partikel A dan B masing-masing adalah

$$S_A = v_{0,A}t - \frac{1}{2}a_At^2$$

$$S_B = d - v_{0,B}t + \frac{1}{2}a_Bt^2$$

Ketika kedua partikel berada pada posisi yang sama, $S_A = S_B$:

$$v_{0,A}t - \frac{1}{2}a_At^2 = d - v_{0,B}t + \frac{1}{2}a_Bt^2$$

$$18t - \frac{1}{2} \cdot 2t^2 = d - 12t + \frac{1}{2} \cdot 3t^2$$

$$18t - t^2 = d - 12t + \frac{3}{2}t^2$$

$$36t - 2t^2 = 2d - 24t + 3t^2$$

$$5t^2 - 60t + 2d = 0 \quad \dots (1)$$

Karena $\Delta t = 4$ detik kemudian kedua partikel berada pada posisi yang sama lagi, maka persamaan (1) juga berlaku untuk $t + 4$:

$$5(t + 4)^2 - 60(t + 4) + 2d = 0 \quad \dots (2)$$

Kurangi persamaan (1) dengan (2), kita dapatkan

$$5t^2 - 60t + 2d - 5(t + 4)^2 + 60(t + 4) - 2d = 0$$

$$5t^2 - 60t - 5(t^2 + 8t + 16) + 60t + 240 = 0$$

$$5t^2 - 5t^2 - 40t - 80 + 240 = 0$$

$$40t = 160$$

$$t = 4 \text{ s}$$

Jadi, kedua partikel pertama kali berada pada posisi yang sama pada $t = 4$ detik, lalu berada pada posisi yang sama lagi pada $t = 4 + 4 = 8$ detik. Untuk mencari d , kita masukkan $t = 4$ ke dalam persamaan (1):

$$5(4)^2 - 60(4) + 2d = 0$$

$$80 - 240 + 2d = 0$$

$$2d = 160$$

$$d = 80 \text{ m} \quad \square$$

3. Ada tiga buah mobil A , B , dan C yang mula-mula diam dan berada pada posisi yang sama. Pada saat $t = 0$, mobil A bergerak ke kanan dengan kecepatan konstan v_0 . Pada waktu $t = T$, mobil B bergerak ke kanan dengan kecepatan awal v_0 dan percepatan a . Kemudian, pada waktu $t = 4T$, mobil C bergerak ke kanan dengan kecepatan awal v_0 dan percepatan $9a$. Suatu saat, ketiga mobil tersebut tepat berada pada posisi yang sama. Agar hal ini dapat dipenuhi, hubungan antara v_0 , a , dan T dapat dinyatakan dalam

$$t = \frac{14}{5}T = 2,8 T$$

Akan tetapi, pada saat $t = 2,8 T$, mobil C bahkan belum bergerak sehingga hal tersebut mustahil. Jadi, $t = 10T$. Kita bisa substitusikan ini ke persamaan (1) maupun (2):

$$(1): \quad v_0 T = \frac{1}{2} a (10T - T)^2$$

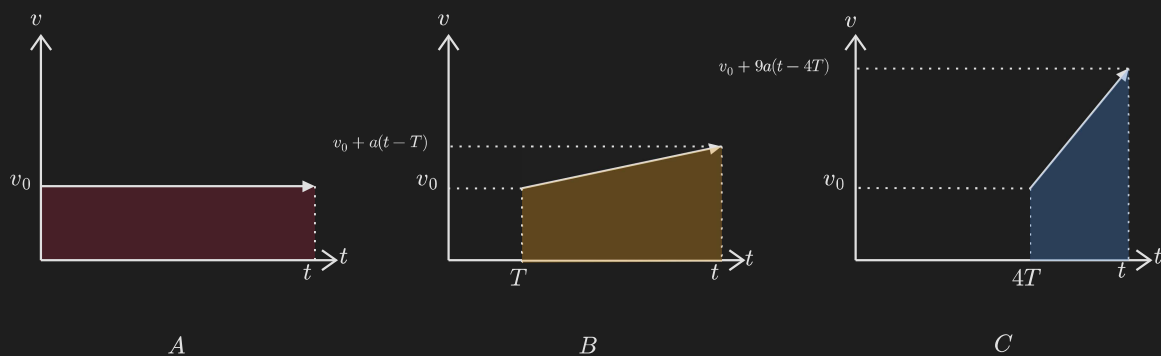
$$\frac{v_0 T}{a} = \frac{81 T^2}{2}$$

$$\frac{v_0}{aT} = \frac{81}{2} = n$$

Jadi, $n = 81/2 = 40,5$. $\square$

Alternatif Solusi

Beberapa orang mungkin lebih suka menggambarkan grafik v vs. t untuk mendapatkan visualisasi dari gerakan ketiga mobil tersebut:



di mana t adalah waktu ketika ketiganya berada pada posisi yang sama. Luas daerah di bawah grafik---yang diberi warna---adalah perpindahan benda. Dari gambar di atas, kita dapatkan

$$S_A = v_0 t$$

$$S_B = \frac{(v_0 + v_0 + a(t-T))}{2} \cdot (t-T)$$

$$= \frac{2v_0(t-T) + a(t-T)^2}{2}$$

$$= v_0(t-T) + \frac{1}{2} a(t-T)^2$$

$$S_C = \frac{(v_0 + v_0 + 9a(t-4T))}{2} \cdot (t-4T)$$

$$= \frac{2v_0(t-4T) + 9a(t-4T)^2}{2}$$

$$= v_0(t-4T) + \frac{9}{2} a(t-4T)^2$$

yang pada dasarnya sama dengan solusi sebelumnya. Langkah-langkah selanjutnya pun sama.

4. Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal tertentu dari titik A yang berada pada ketinggian 68 meter di atas permukaan tanah. Diketahui kecepatan peluru pada ketinggian 35 meter di bawah A sama dengan dua kali kecepatan peluru pada ketinggian 35 meter di atas A . Abaikan hambatan udara. Percepatan gravitasi sama dengan g . Tinggi maksimum yang dicapai peluru diukur dari permukaan tanah adalah ... meter.

Jawab. Misalkan peluru ditembakkan dengan kecepatan awal v_0 , lalu titik pada ketinggian 35 meter di atas dan di bawah A secara berturut-turut adalah titik B dan titik C . Informasi dari soal menyatakan bahwa $v_C = 2v_B$. Ketika peluru bergerak dari A ke B , perpindahannya adalah $\Delta y_{AB} = 35$ m sedangkan dari A ke C adalah $\Delta y_{AC} = -35$ m.

Dengan menggunakan $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$ pada sumbu vertikal, kita dapatkan

$$v_B^2 = v_0^2 - 2g\Delta y_{AB} = v_0^2 - 2g(35) = v_0^2 - 70g \dots (1)$$

$$v_C^2 = v_0^2 - 2g\Delta y_{AC} = v_0^2 - 2g(-35) = v_0^2 + 70g \dots (2)$$

Menjumlahkan keduanya memberikan kita

$$v_B^2 + \underbrace{v_C^2}_{(2v_B)^2} = 2v_0^2$$

$$v_B^2 + 4v_B^2 = 2v_0^2$$

$$v_B^2 = \frac{2}{5}v_0^2 \dots (3)$$

Masukkan (3) ke (1):

$$\frac{2}{5}v_0^2 = v_0^2 - 70g$$

$$\frac{3}{5}v_0^2 = 70g$$

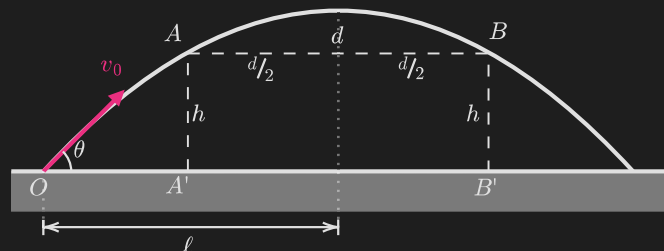
$$v_0^2 = \frac{350}{3}g$$

$$v_0^2 = \frac{350}{3} \cdot (9,8)$$

$$= \frac{3430}{3} \text{ m/s}$$

Jadi, tinggi maksimum peluru dihitung dari tempatnya ditembakkan adalah $h_{max} = \frac{v_{y0}^2}{2g} = \frac{3430/3}{2g} = 58,3$ m, sehingga diukur dari tanah, ketinggian maksimumnya adalah $68 + 58,3 = 126,3$ m. $\square$

5. Sebuah proyektil ditembakkan ke udara dengan kelajuan $v_0 = 30$ m/s sehingga memiliki jangkauan tembak maksimum. Peluru akan melewati dua titik yang ketinggiannya h . Jika jarak dua titik tersebut adalah $d = 18$ meter, maka ketinggian h adalah ... meter.



Catatan awal: Sebagian besar pengerjaan soal ini ditulis secara simbolik, bukan numerik. Tentunya Anda boleh-boleh saja memasukkan angka yang diketahui di tengah-tengah perhitungan.

Jawab. Kita cari dahulu sudut elevasi supaya jangkauan tembak maksimum. Jangkauan maksimum pada gerak parabola adalah

$$R = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}.$$

Ini akan maksimum ketika

$$\frac{dR}{d\theta} = 0$$

$$v_0^2 (\cos 2\theta)$$

$$\cos 2\theta = 0 = \cos 90^\circ$$

$$2\theta = 90^\circ \quad (0 \leq \theta \leq 90^\circ)$$

$\frac{a}{d\theta} \left(\frac{v_0 \sin 2\theta}{g} \right) = 0$ $\frac{2v_0^2 \cos 2\theta}{g} = 0$	$\theta = 45^\circ$
---	---------------------

Besar kecepatan proyektil pada tiap sumbu adalah

$$v_x = v_0 \cos \theta \quad \dots (1)$$

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt \quad \dots (2)$$

Fokus permasalahan utama dari soal ini adalah kita tidak memiliki besaran waktu sebagai variabel yang diketahui. Untungnya, kita sudah mengetahui kecepatan proyektil sehingga ada satu waktu yang bisa kita cari, yakni waktu t_{hmax} ketika mencapai ketinggian maksimum ($v_y = 0$), yang bisa dicari lewat persamaan (2):

$$0 = v_0 \sin \theta - gt_{hmax}$$

$$t_{hmax} = \frac{v_0 \sin \theta}{g} \quad \dots (3)$$

Selanjutnya, kita bisa memanfaatkan kesimetrisan bentuk parabola (lihat gambar). Jika titik dengan ketinggian h adalah A dan B , maka keduanya pasti masing-masing berjarak $d/2$ dari "sumbu simetri", yang dicapai proyektil pada ketinggian maksimum.

Langkah selanjutnya adalah mencari jarak posisi awal partikel (titik O) dengan sumbu simetri tersebut, ℓ . Jika jarak ini dikurangi atau ditambah $d/2$, kita akan dapatkan jarak titik A dan titik B dihitung dari posisi awal proyektil (yakni jarak OA' dan OB').

Memasukkan jarak ini ke $x = v_x t$ memberikan kita waktu yang diperlukan untuk menempuh jarak tersebut, yang pada dasarnya juga merupakan waktu yang diperlukan untuk mencapai ketinggian h . Memasukkannya ke dalam $y = v_y t - \frac{1}{2}gt^2$ untuk $y = h$, kita akan dapatkan nilai h . Baiklah, mari kita eksekusi.

$$x = v_x t$$

$$\ell = v_0 \cos \theta t_{hmax}$$

$$\ell = v_0 \cos \theta \cdot \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

$$\ell = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \quad \dots (3)$$

Jadi, jarak OA' (lihat gambar) adalah

$$OA' = \ell - \frac{d}{2}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} - \frac{d}{2}$$

$$= \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta - gd}{2g}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin 2\theta - gd}{2g} \quad \dots (4)$$

Waktu yang dibutuhkan untuk menempuh jarak tersebut adalah

$$x = v_x t$$

$$OA' = v_0 \cos \theta \cdot t$$

$$t = \frac{OA'}{v_0 \cos \theta}$$

$$= \frac{(v_0^2 \sin 2\theta - gd) / 2g}{v_0 \cos \theta}$$

$$t = \frac{v_0^2 \sin 2\theta - gd}{2v_0 g \cos \theta} \quad \dots (5)$$

yang secara numerik bernilai $t = \frac{723,6}{294\sqrt{2}} = 1,74034$ detik.

Terakhir, tinggi h adalah

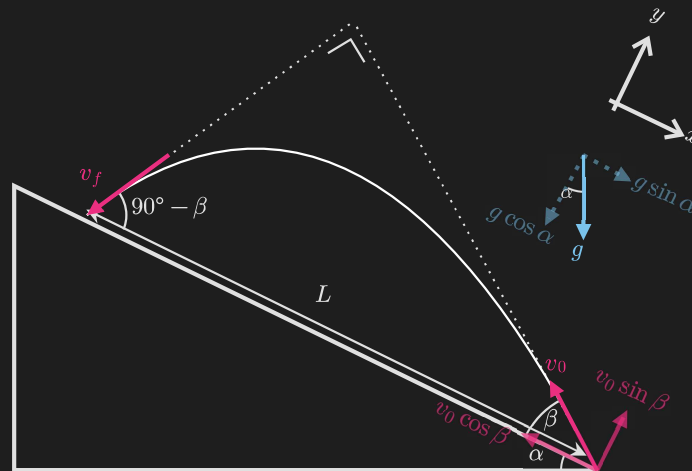
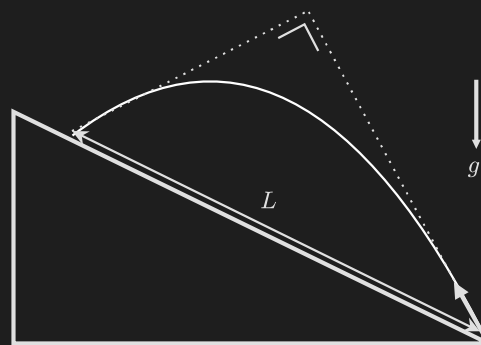
$$y = y_0^0 + v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$h = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

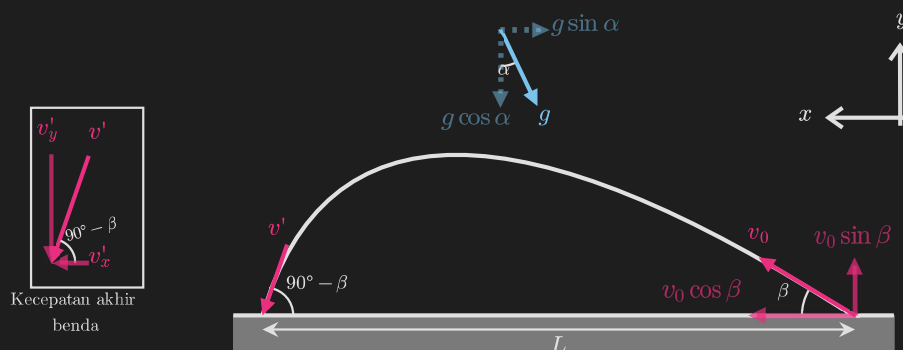
$$= 30 \sin 45^\circ \cdot (1,74034) - \frac{1}{2} \cdot (9,8)(1,74034)^2$$

$$= 22,1 \text{ m} \quad \square$$

6. Sebuah benda dilemparkan dari ujung bawah suatu bidang miring dengan kelajuan dan sudut tertentu. Benda tersebut sampai pada bidang miring kembali pada jangkauan $L = 50$ m. Diketahui vektor kecepatan awal dan kecepatan akhir tepat sebelum menyentuh bidang miring lagi membentuk sudut 90° . Abaikan hambatan udara. Percepatan gravitasi adalah g . Waktu yang dibutuhkan benda sejak dilempar hingga menyentuh bidang miring kembali adalah ... detik.



Jawab. Misalkan sudut elevasi bidang miring adalah α dan sudut antara vektor kecepatan awal dengan bidang miring adalah β . Persoalan gerak parabola pada bidang miring seringkali dapat lebih mudah dikerjakan kalau kita menyesuaikan arah sumbu dengan bidang miring, jadi seperti ini:



Persamaan gerak benda adalah

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \beta - g \sin \alpha \cdot t & x &= v_0 \cos \beta \cdot t - \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2 \\ v_y &= v_0 \sin \beta - g \cos \alpha \cdot t & y &= v_0 \sin \beta \cdot t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2 \end{aligned}$$

Ketika benda jatuh, $x = L$ dan $y = 0$ sehingga

$$L = v_0 \cos \beta \cdot t - \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2 \dots (1)$$

$$0 = v_0 \sin \beta \cdot t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2 \dots (2)$$

Next, kita gunakan informasi bahwa vektor kecepatan awal dan akhir saling tegak lurus. Perhatikan gambar dulu, ya. Catat dulu bahwa

$$\tan(90^\circ - \beta) = \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\cos(90^\circ - \beta)} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \dots (3)$$

dan, menggunakan $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$, komponen vertikal kecepatan awal dan akhir benda sama:

$$\begin{aligned} v_y'^2 &= v_{0y}^2 - 2g \cos \alpha \cdot 0 \\ v_y'^2 &= v_{0y}^2 \end{aligned}$$

[$\Delta s = 0$, benda jatuh lagi ke bidang miring]

dengan $v_{0y} = v_0 \sin \beta$. Jadi, jika komponen-komponen kecepatan akhir v' dinyatakan sebagai v_x' dan v_y' , berlaku

$$\tan(90^\circ - \beta) = \frac{v_y'}{v_x'}$$

$$\frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{v_0 \sin \beta}{v_0 \cos \beta - g \sin \alpha \cdot t}$$

$$v_0 \cos^2 \beta - g \sin \alpha \cos \beta \cdot t = v_0 \sin^2 \beta$$

$$v_0 \overbrace{(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)}^{\cos 2\beta} = g \sin \alpha \cos \beta \cdot t$$

$$v_0 = \frac{g \sin \alpha \cos \beta \cdot t}{\cos 2\beta} \dots (4)$$

Kalau dilihat-lihat dari semua persamaan yang telah kita buat, ada 4 variabel utama yang sering muncul: v_0 , α , β , t . Kita perlu menghilangkan salah satu variabel tersebut. Setelah melihat persamaan (4), terbesit ide untuk menggunakan persamaan (2) karena memuat v_0 dan persamaannya cukup mudah untuk diotak-atik karena tidak ada konstanta.

$$\text{Pers. (2): } 0 = v_0 \sin \beta \cdot t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2$$

$$v_0 \sin \beta = \frac{g \cos \alpha \cdot t}{2}$$

$$v_0 = \frac{g \cos \alpha \cdot t}{2 \sin \beta} \dots (5)$$

Lihat! Kalau kita substitusikan (4) ke (5) atau sebaliknya, t akan tercoret dan variabel v_0 berhasil dihilangkan. Kita dapatkan persamaan dalam α dan β (hanya 2 variabel) yang sepertinya akan mempermudah jalan kita kedepannya.

$$\frac{\cancel{v_0} \sin \alpha \cos \beta \cdot \cancel{t}}{\cos 2\beta} = \frac{\cancel{v_0} \cos \alpha \cdot \cancel{t}}{2 \sin \beta}$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta \cos \beta = \cos \alpha \cos 2\beta$$

$$\sin \alpha \sin 2\beta = \cos \alpha \cos 2\beta$$

$$\cos \alpha \cos 2\beta - \sin \alpha \sin 2\beta = 0$$

$$\cos(\alpha + 2\beta) = 0$$

$$\alpha + 2\beta = 90^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - 2\beta \dots (6)$$

Nampaknya masih belum ada persamaan yang dapat disederhanakan dengan mensubstitusikan (6). Namun, lihat bahwa persamaan (1) belum diapa-apakan. Substitusikan (5) ke (1):

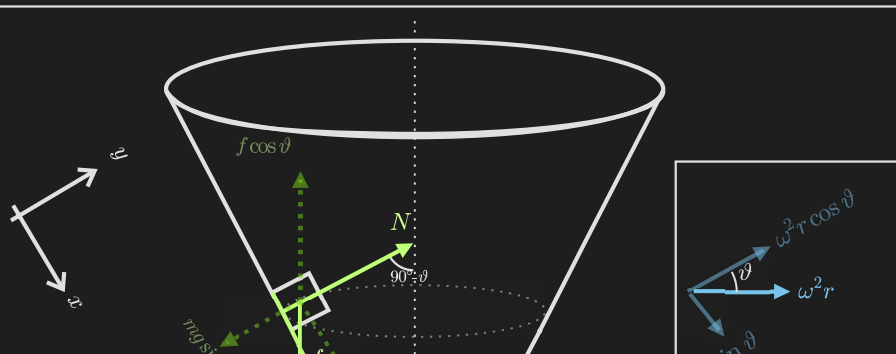
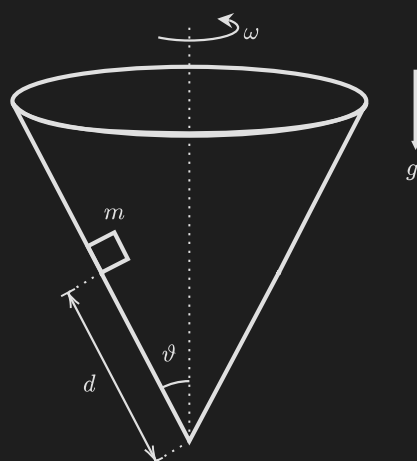
$$\begin{aligned}
 L &= \frac{g \cos \alpha \cdot t}{2 \sin \beta} \cos \beta \cdot t - \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2 \\
 &= \frac{g \cos \alpha \cos \beta \cdot t^2}{2 \sin \beta} - \frac{g \sin \alpha \cdot t^2}{2} \\
 &= \frac{g \cos \alpha \cos \beta \cdot t^2 - g \sin \alpha \sin \beta \cdot t^2}{2 \sin \beta} \\
 &= \frac{gt^2}{2 \sin \beta} (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\
 L &= \frac{gt^2}{2} \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \dots (7)
 \end{aligned}$$

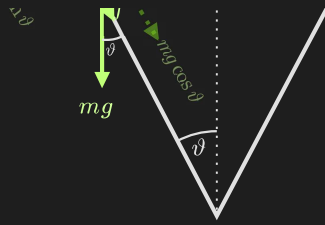
Pada persamaan (7), kita bisa substitusikan persamaan (6):

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{gt^2}{2} \frac{\cos(90^\circ - 2\beta + \beta)}{\sin \beta} \\
 &= \frac{gt^2}{2} \frac{\cos(90^\circ - \beta)}{\sin \beta} \\
 L &= \frac{gt^2 \cancel{\sin \beta}}{2 \cancel{\sin \beta}} \\
 t^2 &= \frac{2L}{g}
 \end{aligned}$$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} = \sqrt{\frac{2(50)}{9,8}} = 3,2 \text{ detik} \quad \square$$

7. Benda bermassa $m = 10$ gram bergerak melingkar di permukaan kerucut bagian dalam pada jarak $d = 15$ cm dari ujung kerucut yang sudutnya $\vartheta = 35^\circ$ terhadap sumbu vertikal (lihat gambar). Jika koefisien gesek $\mu = 0,3$ dan percepatan gravitasi g , frekuensi sudut terbesar dari gerakan benda adalah ... rad/detik.





$$\omega^2 r \sin \vartheta$$

Percepatan benda

Jawab. Coba bayangkan dahulu apa yang terjadi kalau kerucut diputar cepat sekali (serius, coba bayangkan). Benda akan terpelant keluar, 'kan? Kita mencari kecepatan sudut terbesar supaya benda belum terpelant keluar.

Pusat rotasi benda adalah sumbu yang digambarkan oleh garis putus-putus, yang berada di tengah-tengah kerucut. Supaya benda bergerak melingkar, maka pada sumbu- y benda tidak boleh bergerak, sedangkan pada arah radial (pada kasus ini sumbu- x) ada percepatan sentripetal, $\omega^2 r$. Jari-jari putarannya tentunya adalah $r = d \sin \vartheta$.

Hukum I Newton:

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$N - mg \sin \vartheta = m\omega^2 r \cos \vartheta$$

$$N = mg \sin \vartheta + m\omega^2 r \cos \vartheta \dots (1)$$

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$mg \cos \vartheta + f = m\omega^2 r \sin \vartheta$$

$$\frac{f}{\mu N} = m\omega^2 r \sin \vartheta - mg \cos \vartheta$$

$$N = \frac{m\omega^2 r \sin \vartheta - mg \cos \vartheta}{\mu} \dots (2)$$

Substitusikan (1) ke (2):

$$\cancel{m}g \sin \vartheta + \cancel{m}\omega^2 r \cos \vartheta = \frac{\cancel{m}\omega^2 r \sin \vartheta - \cancel{m}g \cos \vartheta}{\mu}$$

$$\mu g \sin \vartheta + \mu \omega^2 r \cos \vartheta = \omega^2 r \sin \vartheta - g \cos \vartheta$$

$$\mu g \sin \vartheta + g \cos \vartheta = \omega^2 r \sin \vartheta - \mu \omega^2 r \cos \vartheta$$

$$(\mu \sin \vartheta + \cos \vartheta)g = (\sin \vartheta - \mu \cos \vartheta)\omega^2 \frac{r}{d \sin \vartheta}$$

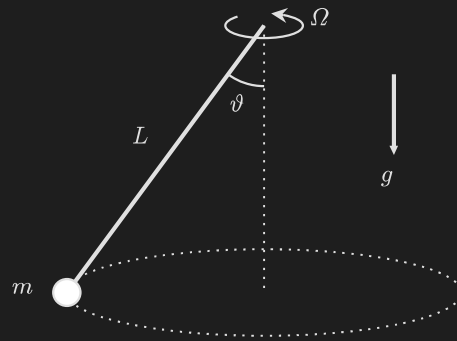
$$\omega^2 = \frac{\mu \sin \vartheta + \cos \vartheta}{\sin \vartheta - \mu \cos \vartheta} \cdot \frac{g}{d \sin \vartheta}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu \sin \vartheta + \cos \vartheta}{\sin \vartheta - \mu \cos \vartheta} \cdot \frac{g}{d \sin \vartheta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0,3)\sin 35^\circ + \cos 35^\circ}{\sin 35^\circ - (0,3)\cos 35^\circ} \cdot \frac{9,8}{(0,15)\sin 35^\circ}}$$

$$= 18,6 \text{ rad/detik} \quad \square$$

8. Sebuah partikel bermassa $m = 3 \text{ kg}$ diikat pada ujung tali tegar tak bermassa dengan panjang $\ell = 2,4 \text{ meter}$. Ujung tali satunya dipasang tetap. Partikel tersebut diputar dengan kecepatan sudut konstan Ω sehingga bergerak dalam bidang horizontal. Sudut antara tali dengan sumbu vertikal z adalah ϑ . Abaikan hambatan udara. Percepatan gravitasi sama dengan g . Jika sudut konstan $\vartheta = \vartheta_0$ dengan $\cos \vartheta_0 = 1/3$ adalah sudut antara tali dengan garis vertikal sehingga m berada pada bidang horizontal yang tetap, maka besar kecepatan sudut rotasi Ω sama dengan ... rad/detik.



Jawab. Supaya m bergerak pada bidang horizontal yang tetap, $\Sigma F_y = 0$. Karena m bergerak melingkar, ia akan mengalami gaya sentripetal ke arah radial. Pada kasus ini, jari-jari putarannya adalah $L \sin \vartheta$.

Hukum I Newton:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T \cos \vartheta - mg = 0$$

$$T \cos \vartheta = mg$$

$$T = \frac{mg}{\cos \vartheta} \dots (1)$$

Hukum II Newton:

$$\Sigma F_r = m\omega^2 R$$

$$T \sin \vartheta = m\Omega^2 L \sin \vartheta$$

$$T = m\Omega^2 L$$

$$\frac{mg}{\cos \vartheta} = \Omega^2 L$$

$$\Omega^2 = \frac{g}{L \cos \vartheta}$$

$$|\Omega| = \sqrt{\frac{g}{L \cos \vartheta}} = \sqrt{\frac{9,8}{(2,4)(1/3)}} = 3,5 \text{ rad/s} \quad \blacksquare$$

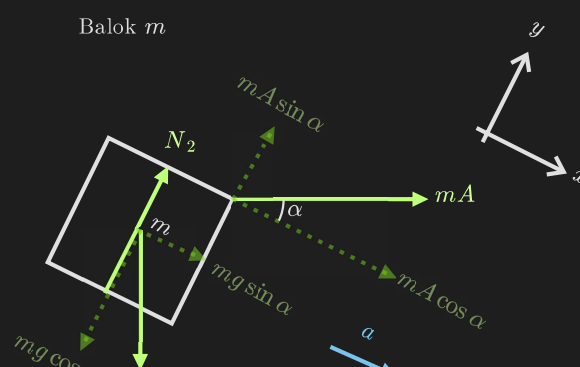
2. Dinamika Translasi

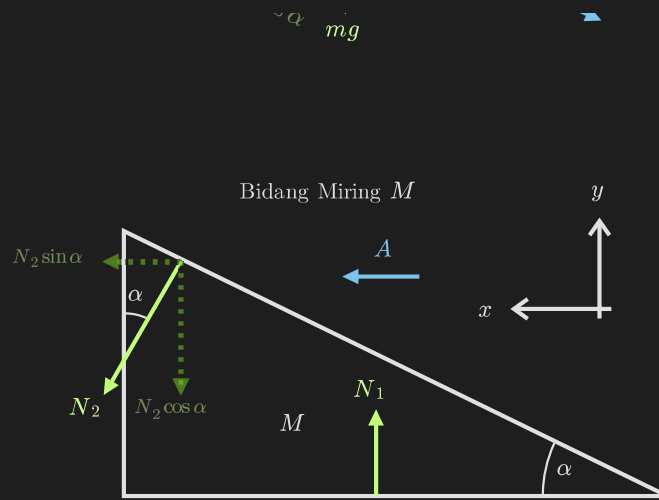
9. Roket dapat bergerak karena gaya dorong dari gas hasil pembakaran. Tinjau roket dengan massa total $m_1 = 2800$ ton yang sedang bergerak di ruang angkasa yang bebas gravitasi dengan kelajuan v_1 . Kelajuan gas hasil pembakaran relatif terhadap roket adalah v_r . Pengurangan massa total roket menjadi m_2 ternyata dapat meningkatkan kelajuan roket menjadi v_2 , di mana hubungan antara keduanya berbentuk:

$$v_2 - v_1 = v_r \ln \left(\frac{m_1}{m_2} \right)$$

Roket ini ternyata telah mengkonsumsi bahan bakar sebanyak 2100 ton selama 150 detik dan selama pembakaran ini telah menghasilkan gaya konstan pada roket sebesar $3,4 \times 10^7$ N. Percepatan vertikal awal roket adalah ... m/s².

10. Sebuah balok digantung pada ujung bawah sebuah struktur batang terlihat seperti pada gambar. Asumsikan batang-batang yang menopang balok tidak bermassa. Terdapat tali yang menahan sistem agar tetap diam pada sudut bukaan tertentu dengan besar tegangan $T = 25$ N. Percepatan gravitasi adalah g . Massa balok tersebut adalah ... kg.





Jawab. Karena soal menggunakan konsep percepatan relatif, kita meninjau balok m relatif terhadap bidang miring M . Jadi, bidang miring M dianggap diam sehingga bukan bidang miring yang bergerak dengan percepatan A ke kiri, melainkan balok m bergerak dengan percepatan A ke kanan ditambah dengan percepatannya menuruni bidang miring---inilah kenapa ada gaya mA pada balok m .

Balok m

Hukum I dan II Newton

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= ma \\ mg \sin \alpha + mA \cos \alpha &= ma \\ g \sin \alpha + A \cos \alpha &= a \dots (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0 \\ N_2 + mA \sin \alpha - mg \cos \alpha &= 0 \\ N_2 &= mg \cos \alpha - mA \sin \alpha \dots (2)\end{aligned}$$

Bidang Miring M

Hukum II Newton

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= MA \\ N_2 \sin \alpha &= MA \dots (3)\end{aligned}$$

Substitusikan (2) ke (3):

$$\begin{aligned}(mg \cos \alpha - mA \sin \alpha) \sin \alpha &= MA \\ mg \sin \alpha \cos \alpha - mA \sin^2 \alpha &= MA \\ mg \sin \alpha \cos \alpha &= (M + m \sin^2 \alpha) A \\ A &= \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \dots (4)\end{aligned}$$

Substitusikan (4) ke (1):

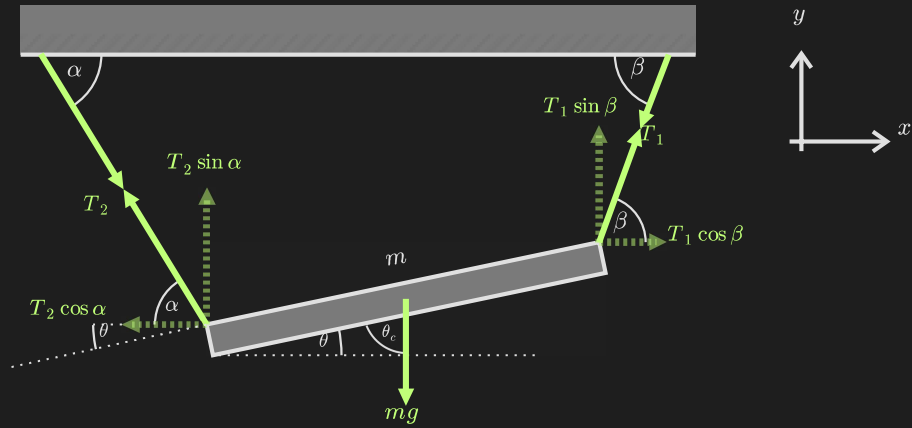
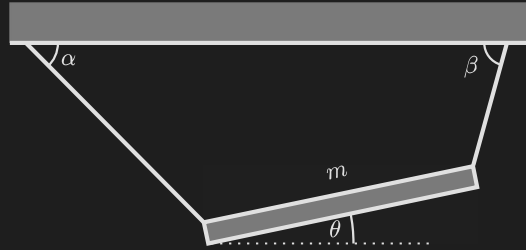
$$\begin{aligned}g \sin \alpha + \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{(M + m \sin^2 \alpha)} \cos \alpha &= a \\ a &= g \sin \alpha + \frac{mg \sin \alpha \cos^2 \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{(M + m \sin^2 \alpha) g \sin \alpha + mg \sin \alpha \cos^2 \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{Mg \sin \alpha + mg \sin \alpha \cos^2 \alpha + mg \sin^3 \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{Mg \sin \alpha + mg \sin \alpha (\overbrace{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}^1)}{M + m \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{(M + m) g \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \dots (5)\end{aligned}$$

Jadi, nilai a / A :

$$\frac{a}{A} = \frac{(M + m) g \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \div \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(M+m)g \sin \alpha}{M+m \sin^2 \alpha} \times \frac{M+m \sin^2 \alpha}{mg \sin \alpha \cos \alpha} \\
&= \frac{M+m}{m \cos \alpha} = \frac{2,5\mathcal{M} + \mathcal{M}}{\mathcal{M} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)} = 3 \div \frac{2}{3} \\
&= 3 \cdot \frac{3}{2} = 4,5 \quad \square
\end{aligned}$$

12. Ujung-ujung sebuah batang homogen digantung ke atap dengan tali yang masing-masing membentuk sudut $\alpha = 30^\circ$ dan $\beta = 53^\circ$ terhadap atap (lihat gambar). Dalam keadaan setimbang, nilai tangen dari sudut yang dibentuk batang terhadap horizontal adalah ...



Hukum I Newton:

$$\begin{aligned}
\Sigma F_x &= 0 & \Sigma F_y &= 0 \\
T_1 \cos \beta - T_2 \cos \alpha &= 0 & T_1 \sin \beta + T_2 \sin \alpha - mg &= 0 \\
T_1 &= T_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \dots (1) & T_1 \sin \beta + T_2 \sin \alpha &= mg \dots (2)
\end{aligned}$$

Substitusikan Pers. (1) ke Pers. (2):

$$\begin{aligned}
T_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \sin \beta + T_2 \sin \alpha &= mg \\
\frac{T_2 \cos \alpha \sin \beta + T_2 \sin \alpha \cos \beta}{\cos \beta} &= mg \\
T_2 (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) &= mg \cos \beta \\
T_2 \sin(\alpha + \beta) &= mg \cos \beta \\
T_2 &= \frac{mg \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \dots (3)
\end{aligned}$$

Substitusikan Pers. (3) ke Pers. (1):

$$T_1 = \frac{mg \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \dots (1)$$

Melihat persamaan-persamaan di atas, kita tidak akan bisa menemukan θ dengannya. Kita perlu satu persamaan lagi. Karena batang setimbang, kita bisa menggunakan kesetimbangan torsi juga. Misalkan panjang batang adalah ℓ . Karena batang homogen, gaya berat bekerja pada tengah-tengah batang, yakni pada jarak $\ell/2$ dari ujung-ujungnya.

Kita bisa tinjau torsi pada salah satu ujung batang, misalnya pada ujung tali T_1 :

$$\begin{aligned}
\Sigma \tau &= 0 \\
T_2 \cancel{\lambda} \sin(\alpha + \theta) - mg \cdot \frac{\cancel{\lambda}}{2} \cdot \sin(90^\circ - \theta) &= 0 \\
2T_2 \sin(\alpha + \theta) &= mg \cos \theta \\
2 \frac{mg \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \sin(\alpha + \theta) &= mg \cos \theta \\
2 \cos \beta \sin(\alpha + \theta) &= \cos \theta \sin(\alpha + \beta) \\
2 \cos \beta (\sin \alpha \cos \theta + \sin \theta \cos \alpha) &= \cos \theta (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) \\
\frac{\sin \alpha \cos \theta + \sin \theta \cos \alpha}{\cos \theta} &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{2 \cos \beta} \\
\sin \alpha + \tan \theta \cos \alpha &= \frac{\tan \beta \cos \alpha + \sin \alpha}{2} \\
\tan \theta \cos \alpha &= \frac{\tan \beta \cos \alpha + \sin \alpha}{2} - \sin \alpha \\
\tan \theta \cos \alpha &= \frac{\tan \beta \cos \alpha + \sin \alpha - 2 \sin \alpha}{2} \\
\tan \theta &= \frac{\tan \beta \cos \alpha - \sin \alpha}{2 \cos \alpha} \\
\tan \theta &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{2} \\
&= 0,37 \quad \square
\end{aligned}$$

13. Diketahui suatu vektor posisi $\mathbf{r} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ bersatuan meter dan suatu gaya konstan $\mathbf{F}$. Di sini, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, dan $\mathbf{k}$ secara berturut-turut adalah vektor satuan pada sumbu- x , y , dan z . Vektor torka yang dilakukan oleh gaya $\mathbf{F}$ terhadap lengan $\mathbf{r}$ adalah $\mathbf{T}$ sedemikian sehingga perkalian silang (*cross product*) $\mathbf{r} \times \mathbf{T} = (n+8)\mathbf{i} + (n-6)\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$ bersatuan N.m^2 , dengan n suatu konstanta. Adapun besar usaha yang dilakukan oleh $\mathbf{F}$ sepanjang lintasan vektor $\mathbf{r}$ adalah $W = 14$ joule. Jika gaya $\mathbf{F}$ tersebut dikenakan pada benda bermassa $m = 3$ kg, maka besar percepatan benda sama dengan ... m/s.

Jawab. Kita akan tuliskan vektor dalam bentuk matriks kolom. Dari soal, berikut adalah yang kita ketahui:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} \times \mathbf{T} = \begin{bmatrix} n+8 \\ n-6 \\ -14 \end{bmatrix}, \quad W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = 14$$

Torsi adalah hasil *cross product* antara $\mathbf{r}$ dengan $\mathbf{F}$, yakni $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Dengan demikian,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{T} = \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

Kita bisa menghitung *cross product*-nya dengan memisalkan gaya $\mathbf{F}$ adalah $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$, lalu membuat 4 persamaan dari

seluruh informasi yang diketahui, lalu menemukan nilai F_x , F_y , F_z , dan n . Akan tetapi, ini akan sangat merepotkan karena perhitungannya sangat menguras waktu, jiwa, dan tenaga. Kita akan menggunakan suatu identitas, yakni $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$. Jadi,

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \underbrace{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{F})}_W \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{F}$$

$$\begin{bmatrix} n+8 \\ n-6 \\ -14 \end{bmatrix} = 14\mathbf{r} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \mathbf{F}$$

$$\begin{bmatrix} n+8 \\ n-6 \end{bmatrix} = 14 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - (1^2 + 2^2 + 4^2) \mathbf{F}$$

$$\begin{bmatrix} -14 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n+8 \\ n-6 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \\ 56 \end{bmatrix} - 21\mathbf{F}$$

$$21\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 14 - (n+8) \\ 28 - (n-6) \\ 56 - (-14) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 6-n \\ 34-n \\ 70 \end{bmatrix} \dots (1)$$

Selanjutnya, kita gunakan informasi kedua:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = 14$$

$$\frac{1}{21} \begin{bmatrix} 6-n \\ 34-n \\ 70 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 14$$

$$(6-n) + 2(34-n) + 4 \cdot 70 = 294$$

$$6-n+68-2n+280=294$$

$$-3n=-60$$

$$n=20 \dots (2)$$

Substitusikan nilai n ke (1):

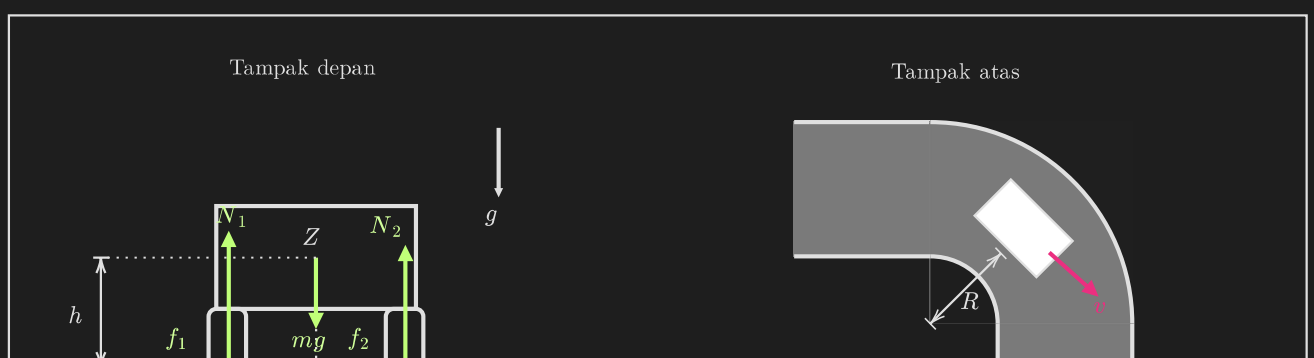
$$\mathbf{F} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 6-20 \\ 34-20 \\ 70 \end{bmatrix} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} -14 \\ 14 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 10/3 \end{bmatrix} \dots (3)$$

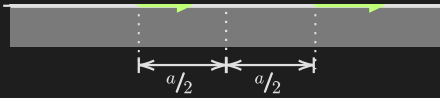
Jadi, besar gaya $\mathbf{F}$ adalah

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}| &= \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{100}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{108}{9}} \\ &= \sqrt{12} \end{aligned}$$

Dengan demikian, percepatan benda adalah $a = \frac{F}{m} = \frac{\sqrt{12}}{3} = 1,2 \text{ m/s}^2$.

14. Sebuah mobil bermassa $m = 1200 \text{ kg}$ tengah melintas di sebuah belokan jalanan mendatar dengan jejari $R = 35$ meter. Anggap pusat massa mobil berada di lintasan belokan ini. Jika jarak antara kedua poros ban kanan dan kiri adalah $a = 2,3 \text{ m}$ dan pusat massa mobil berada pada ketinggian $h = 80 \text{ cm}$ di atas tanah, maka laju maksimum yang dapat ditempuh mobil di belokan tersebut adalah ... m/s .





Jawab. Harus ada gaya gesek pada ban yang membelokkan kecepatannya dan mencegahnya tetap bergerak lurus. Gaya gesek inilah yang berperan sebagai gaya sentripetal di sini. Adapun pada sumbu- y mobil tidak bergerak. Selanjutnya, mobil juga mengalami kesetimbangan torsi---kita akan meninjaunya di titik berat (Z), ambil arah jarum jam sebagai positif.

Hukum I Newton:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N_1 + N_2 - mg = 0$$

$$N_1 + N_2 = mg \dots (1)$$

$$\Sigma \tau_Z = 0$$

$$\frac{N_1 a}{2} - \frac{N_2 a}{2} - f_1 h - f_2 h = 0$$

$$N_1 - \frac{2(f_1 + f_2)h}{a} = N_2 \dots (2)$$

Hukum II Newton:

$$\Sigma F_r = \frac{mv^2}{R}$$

$$f_1 + f_2 = \frac{mv^2}{R} \dots (3)$$

Substitusikan persamaan (3) ke (2):

$$N_1 - \frac{2mv^2 h}{Ra} = N_2$$

$$N_2 - N_1 = -\frac{2mv^2 h}{Ra} \dots (4)$$

Pada kasus ekstrem di mana mobil bergerak dengan laju maksimum, mobil hampir terpelanting ke pusat lintasan. Pada saat itu terjadi, $N_2 = 0$.

Jumlahkan (1) dan (4):

$$N_2 + N_1 = mg \dots (1)$$

$$N_2 - N_1 = -\frac{2mv^2 h}{Ra} \dots (4)$$

$$\begin{array}{r} \hline + \\ \hline \end{array}$$

$$2 \underbrace{N_2}_0 = mg - \frac{2mv^2 h}{Ra}$$

$$\frac{2 \cancel{N_2}}{Ra} = \cancel{mg}$$

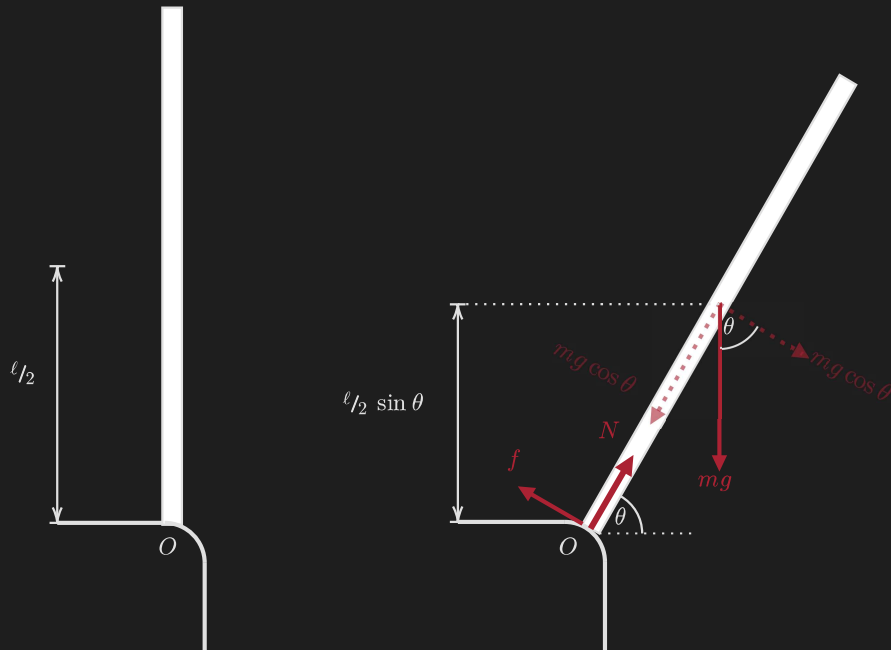
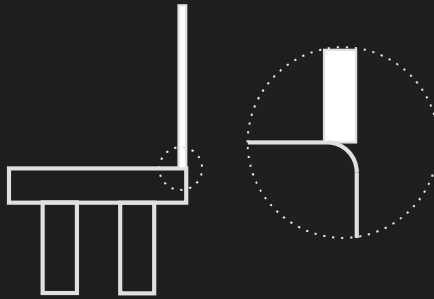
$$v^2 = \frac{Rga}{2h}$$

$$v = \sqrt{\frac{Rga}{2h}} = \sqrt{\frac{(35)(9,8)(2,3)}{2(0,8)}}$$

$$= 22,2 \text{ m/s} \quad \square$$

3. Dinamika Rotasi

15. Sebuah batang silinder dengan massa m dan panjang ℓ ditaruh di ujung meja seperti pada gambar. Asumsikan bahwa ujung meja berbentuk setengah lingkaran seperti pada gambar, dengan jejari lingkaran yang jauh lebih kecil dari diameter penampang batang. Jika kemudian batang jatuh dari keadaan diam pada sudut 90° terhadap sumbu horizontal dan selama proses jatuh tersebut tidak terjadi slip antara ujung batang silinder dengan ujung meja, maka besarnya sinus sudut antara batang dan sumbu horizontal saat batang lepas kontak dengan ujung meja adalah ...



Jawab. Gaya-gaya yang bekerja pada benda ditunjukkan pada gambar di atas.

Batang akan tidak slip hanya jika ada gaya gesek statis. Batang akan berotasi pada ujung bawah yang berkontak dengan meja ($I = \frac{1}{3} m\ell^2$).

Gaya berat mg terletak pada pusat massa batang; berjarak $\ell/2$ dari tiap ujungnya. Karena pojok meja berbentuk lingkaran, batang akan bergerak pada lintasan lingkaran sehingga terdapat gaya sentripetal. Terakhir, pada kasus kritis ketika batang lepas kontak dengan meja, $N = 0$. Mari mulai analisis kita.

Hukum II Newton:

$$\Sigma F_r = m\omega^2 r$$

$$mg \sin \theta - N = \frac{m\omega^2 \ell}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\omega^2 \ell}{2g} \dots (1)$$

Kira-kira, dari mana kita bisa dapatkan nilai ω^2 ? Kita bisa gunakan hukum konservasi energi mekanik:

$$E_{m,i} = E_{m,f}$$

$$E_{k,i} + E_{p,i} = E_{k,f} + E_{p,f}$$

$$0 + \frac{mg\ell}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{mg\ell \sin \theta}{2}$$

$$mg\ell = \frac{1}{3}m\ell^2\omega^2 + mg\ell \sin \theta$$

$$\frac{\omega^2 \ell}{3} = g - g \sin \theta$$

$$\omega^2 = \frac{3g(1 - \sin \theta)}{\ell} \dots (2)$$

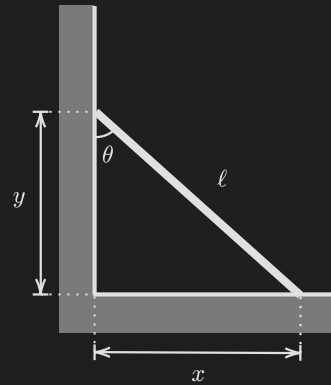
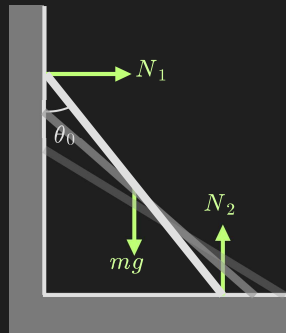
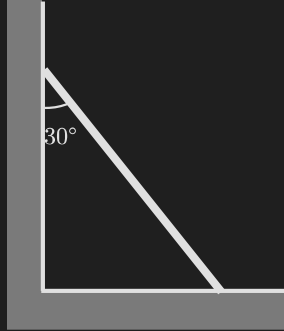
Substitusikan (2) ke (1):

$$\sin \theta = \left(\frac{3g(1 - \sin \theta)}{\ell} \right) \frac{\ell}{2g}$$

$$2 \sin \theta = 3 - 3 \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{3}{5} = 0,6 \quad \square$$

16. Sebuah batang bermassa m dan panjang ℓ disandarkan pada dinding licin di atas lantai licin dan membentuk sudut 30° terhadap dinding seperti pada gambar. Jika batang dilepaskan dari keadaan diam, maka cosinus sudut antara batang dengan dinding saat keduanya lepas kontak adalah ...



Jawab. Batang akan tergelincir karena tidak ada gaya gesek yang menahannya. Pusat massa akan bergerak, sementara di saat yang bersamaan batang berotasi terhadap pusat massanya ($I = 1/12 m \ell^2$). Gambar sebelah kiri menunjukkan kondisi awal benda ketika membentuk sudut awal $\theta_0 = 30^\circ$. Kita akan fokus meninjau gerakan di sumbu- x sebab tujuan dari analisis kita adalah meninjau ketika batang dan dinding lepas kontak, yakni ketika $N_1 = 0$. Gaya tersebut bekerja pada sumbu- x .

Selanjutnya, perhatikan gambar sebelah kanan. x adalah jarak ujung bawah batang dengan dinding, sedangkan y adalah jarak ujung atas batang dengan lantai dan θ adalah sudut yang dibentuk oleh batang dengan dinding. Cukup jelas bahwa nilai ketiganya selalu berubah-ubah karena batang terus bergerak dan berotasi. Akan tetapi, ketiga variabel tersebut memenuhi beberapa persamaan, yakni

$$x^2 + y^2 = \ell^2 \quad \dots (1)$$

$$x = \ell \sin \theta \quad \dots (2)$$

Persamaan (2) dapat diturunkan terhadap waktu untuk mendapatkan $\dot{x}$ dan $\ddot{x}$:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \ell \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = (\ell \cos \theta) \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \frac{d(\ell \cos \theta)}{dt} \dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \ell \cos \theta \ddot{\theta} - \ell \sin \theta \dot{\theta}^2 \quad \dots (3)$$

Apa selanjutnya? Meninjau gaya atau torsi mungkin bisa dilakukan, tetapi kita akan menggunakan hukum konservasi energi mekanik. N_1 dan N_2 tidak memberikan usaha sehingga hanya gaya gravitasi mg yang bekerja sehingga kita bisa menggunakan hukum tersebut. Mari tentukan energi kinetiknya dulu. Karena benda bertranslasi dan berotasi, energi kinetiknya adalah jumlah dari energi kinetik translasi dan energi kinetik rotasi:

$$E_k = E_{kt} + E_{kr}$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\omega^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}m\ell^2\omega^2$$

$$= \frac{1}{8}m\ell^2\omega^2 + \frac{1}{24}m\ell^2\omega^2$$

$$= \frac{1}{6}m\ell^2\omega^2$$

$$= \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2 \dots (4)$$

Di sini telah digunakan hubungan $v = r\omega$ dengan $r = \ell / 2$, karena batang berputar terhadap pusat massanya. Adapun energi potensial gravitasinya adalah

$$E_p = \frac{mg\ell \cos \theta}{2} \dots (4)$$

karena pusat massa berada pada ketinggian $(\ell \cos \theta) / 2$. Mula-mula batang diam sehingga $E_{k,i} = 0$, sedangkan energi potensial gravitasinya adalah $E_{p,i} = \frac{mg\ell \cos \theta_0}{2}$. Dengan demikian, hukum konservasi energi mekanik memberikan

$$E_{m,i} = E_{m,f}$$

$$E_{k,i} + E_{p,i} = E_{k,f} + E_{p,f}$$

$$0 + \frac{mg\ell \cos \theta_0}{2} = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{mg\ell \cos \theta}{2}$$

$$g \cos \theta_0 = \frac{1}{3}\ell\dot{\theta}^2 + g \cos \theta$$

$$\frac{1}{3}\ell\dot{\theta}^2 = g(\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{\ell}(\cos \theta_0 - \cos \theta) \dots (5)$$

Menurunkan kedua ruas persamaan (5) terhadap waktu memberikan kita

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{3g}{\ell} \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2\ell} \sin \theta \dots (6)$$

karena $\cos \theta_0$ adalah nilai yang tetap, tidak berubah-ubah (konstanta). Substitusikan (6) ke (3):

$$\ddot{x} = \ell \cos \theta \left(\frac{3g}{2\ell} \sin \theta \right) - \ell \sin \theta \left(\frac{3g}{\ell} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \right)$$

$$\ddot{x} = \frac{3g \sin \theta \cos \theta}{2} - 3g \sin \theta \cos \theta_0 + 3g \sin \theta \cos \theta$$

$$= 3g \sin \theta \left(\frac{\cos \theta}{2} - \cos \theta_0 + \cos \theta \right)$$

$$= 3g \sin \theta \left(\frac{\cos \theta - 2 \cos \theta_0 + \cos \theta}{2} \right)$$

$$= \frac{\gamma}{2} g \sin \theta (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0) \dots (7)$$

Terakhir, untuk menggunakan informasi $N_1 = 0$, kita lakukan analisis gaya.

$$\Sigma F_x = m a_x = m \ddot{x}$$

$$N_1 = \frac{3}{2} m g \sin \theta (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$

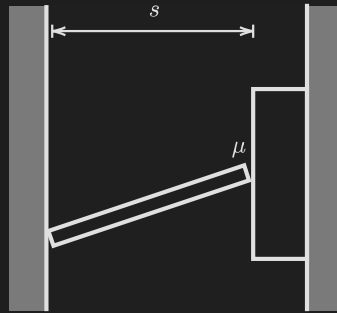
$$0 = \frac{3}{2} m g \sin \theta (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$

$$3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0 = 0$$

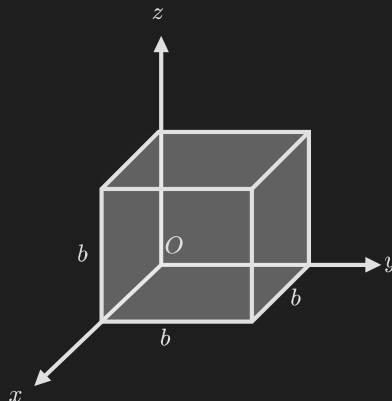
$$\cos \theta = \frac{2}{3} \cos \theta_0 = \frac{2}{3} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,6 \quad \square$$

17. Sebuah bola pejal bermassa $M = 3,5$ kg dan berjari-jari $R = 30$ cm dengan momen inersia terhadap sumbunya sebesar $I = \frac{2}{5} M R^2$ dilemparkan di atas suatu permukaan datar dengan kecepatan awal pusat massa sebesar $v_0 = 16$ m/s ke kanan dan kecepatan sudut sebesar $\omega_0 = 13$ rad/s dengan arah berlawanan jarum jam. Bola tersebut kemudian tergelincir pada permukaan tersebut dengan tendensi ω_0 untuk menghasilkan putaran dengan arah yang berlawanan dengan v_0 . Koefisien gesek antara bola pejal dengan permukaan adalah $\mu = 0,3$. Besar kecepatan pusat massa pada saat bola mulai menggelinding murni adalah ... m/s.

18. Sebuah mekanisme kunci satu arah dibuat dengan memanfaatkan batang dan balok ringan. Balok hanya dapat bergerak vertikal, sementara salah satu ujung batang berporos pada dinding. Jarak horizontal antara poros dan permukaan kiri balok adalah $s = 2$ m. Diketahui koefisien gesek statis antara batang dan balok adalah $\mu = \frac{3}{4}$, dan abaikan gravitasi. Panjang batang agar balok hanya dapat bergerak ke atas adalah ... m.



19. Sebuah kubus homogen bermassa $M = 2,3$ kg mempunyai panjang rusuk $b = 15$ cm. Kubus diletakkan di suatu koordinat dengan satu sudut kubus terletak di pusat koordinat dan rusuk-rusuk kubus berhimpit dengan sumbu-sumbu koordinat seperti tampak pada gambar. Nilai komponen tensor momen inersia I_{12} adalah ... kg.m².



Jawab. Untuk penjelasan dari soal serupa, silakan lihat [ini](#) dan [ini](#). Sebagai bekal teori, lihat [ini](#). Tensor momen inersia dari suatu benda dirumuskan sebagai

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xy dm & -\int xz dm \\ -\int yx dm & -\int (z^2 + x^2) dm & -\int yz dm \\ -\int zx dm & -\int zy dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix}$$

Jadi, komponen tensor momen inersia I_{12} adalah

$$I_{12} = -\int xy dm \dots (1)$$

Karena kubus homogen, maka massa jenisnya sama. Misalkan massa jenisnya adalah ρ , maka

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{b^3} \dots (2)$$

Lalu, karena $\rho = \frac{m}{V}$, atau $m = \rho V$, maka

$$\begin{aligned} dm &= \rho dV \\ &= \rho dx dy dz \dots (3) \end{aligned}$$

di mana $dV = dx dy dz$ karena volume merupakan hasil kali dari tiga dimensi: panjang, lebar, dan tinggi. Dengan demikian, (1) dapat ditulis ulang sebagai

$$\begin{aligned} I_{12} &= -\iiint \rho xy dx dy dz \\ &= -\rho \left(\int x dx \right) \left(\int y dy \right) \left(\int dz \right) \end{aligned}$$

Mari kita tetapkan batas integralnya dahulu. Karena salah satu titik sudut berada di $(0,0,0)$ sedangkan panjang sisi kubus adalah b , maka kita akan mengintegrasikan dari 0 hingga b :

$$\begin{aligned} I_{12} &= -\rho \left(\int_0^b x dx \right) \left(\int_0^b y dy \right) \left(\int_0^b dz \right) \\ &= -\frac{M}{b^3} \cdot \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^b \right) \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^b \right) (z \Big|_0^b) \\ &= -\frac{M}{b^3} \cdot \frac{b^2}{2} \cdot \frac{b^2}{2} \cdot b \\ &= -\frac{Mb^2}{4} \\ &= -\frac{(2,3)(0,15)^2}{4} \\ &= 0,0129375 \text{ kg.m}^2 \\ &= 0,013 \text{ kg.m}^2 \quad \square \end{aligned}$$

4. Momentum dan Impuls

20. Gambar berikut memperlihatkan sistem tiga bola identik. Bola 2 dan bola 3 dalam keadaan diam dan kontak satu sama lain. Bola

1 bergerak dengan kelajuan $\frac{3}{4}v_0$ ($v_0 = 18 \text{ m/s}$) di sepanjang garis yang melewati titik kontak bola 2 dan bola 3. Jika bola 1 menumbuk bola 2 dan bola 3 secara elastik, kelajuan bola 2 setelah tumbukan adalah ... m/s.



21. Sebuah partikel menumbuk secara tegak lurus dan secara elastik ujung sebuah batang tipis yang diam di permukaan horizontal licin. Ujung batang yang lain dibiarkan bebas. Setelah tumbukan, partikel tersebut diam. Perbandingan antara energi kinetik

partikel sebelum tumbukan dengan energi kinetik translasi pusat massa batang setelah tumbukan sama dengan ...

22. Sebuah bola bermassa $m = 0,1$ kg dijatuhkan dalam medan gravitasi g tanpa kecepatan awal dari ketinggian h dan mengalami gaya gesek udara konstan sebesar $f = 0,5$ N. Saat mencapai permukaan tanah, bola memantul secara lenting sempurna kemudian mencapai ketinggian maksimum yang baru sebesar h' . Jika diketahui ketinggian maksimum terakhir bola telah bernilai kurang dari 10% dari ketinggian awal, h , maka tumbukan bola dengan tanah sudah terjadi ... kali.

Jawab. (*) [Maaf salah naruh kategori. Harusnya ini soal kinematika wkuk.]

Gaya-gaya yang bekerja pada bola adalah gaya gravitasi mg ke bawah dan gaya gesek f berlawanan arah gerak bola. Mari kita cari percepatan gerak bola, baik ketika bergerak ke atas (a_1) maupun ke bawah (a_2).

Ambil arah atas sebagai positif. Ketika bergerak ke atas, gaya gesek berarah ke bawah:

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= ma_1 \\ -f - mg &= ma_1 \\ a_1 &= -\frac{f + mg}{m} \\ &= -\frac{0,5 + (0,1)(9,8)}{0,1} = -14,8 \text{ m/s}^2 \dots (1)\end{aligned}$$

Ketika bergerak ke bawah, gaya gesek berarah ke atas:

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= ma_2 \\ f - mg &= ma_2 \\ a_2 &= \frac{f - mg}{m} \\ &= \frac{0,5 - (0,1)(9,8)}{0,1} = -4,8 \text{ m/s}^2 \dots (2)\end{aligned}$$

Kecepatan bola ketika menyentuh tanah pertama kalinya, v_1 , dapat dicari lewat $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$ dengan $v_0 = 0$, $a = a_2 = -4,8 \text{ m/s}^2$ dan $\Delta s = 0 - h = -h$:

$$\begin{aligned}v_1^2 &= 2(-4,8)(-h) \\ v_1^2 &= 9,6 h \dots (3)\end{aligned}$$

Selanjutnya, bola akan memantul ke atas dengan kecepatan v karena tumbukan dengan lantai adalah lenting sempurna. Bola akan bergerak ke atas hingga mencapai ketinggian maksimum yang baru, h' . Kita bisa mencari h' lewat $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$ dengan $v = 0$, $v_0 = v_1$, $a = a_1$, dan $\Delta s = h' - 0 = h'$:

$$0 = 9,6h + 2(-14,8)h'$$

$$0 = 9,6h - 29,6h'$$

$$9,6h = 29,6h'$$

$$\eta = \frac{h'}{h} = \frac{9,6}{29,6} = \frac{12}{37}$$

η adalah perbandingan ketinggian maksimum sesudah dengan sebelum tumbukan. Karena tumbukan lenting sempurna, maka nilai η konstan dan ketinggian maksimum bola membentuk suatu barisan geometri dengan rasio η dan suku pertama $a = h$. Dengan demikian, rumus untuk ketinggian maksimum setelah tumbukan ke- n adalah

$$h_n = h\eta^n$$

Ketika ketinggian maksimum kurang dari $10\% = 1/10$ dari ketinggian awal, yakni $h_n < \frac{h}{10}$, maka nilai n adalah

$$h\eta^n < \frac{h}{10}$$

$$\left(\frac{12}{37}\right)^n < 10^{-1}$$

$$n > \frac{12}{37} \log(10^{-1})$$

$$n > 2,0449$$

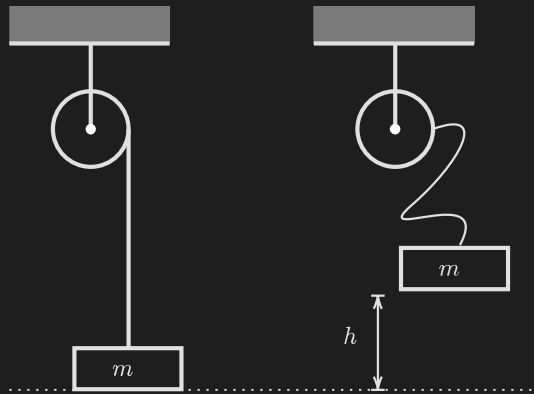
Tanda pertidaksamaan menjadi berbalik karena basis dari logaritmanya kurang dari 1. Nilai n yang mungkin adalah $n = 3$. $\square$

Ini cukup masuk akal karena setelah tumbukan pertama, ketinggian maksimumnya menjadi $\eta = 12/37 \approx 12/36 = 1/3$ kali dari ketinggian awal. Setelah tumbukan kedua, ketinggian maksimum bola menjadi $1/3 \times 1/3 = 1/9 \approx 1/10 \approx 10\%$ dari ketinggian awal. Selanjutnya, ketinggian maksimumnya kurang dari 10% ketinggian awal.

23. Sebuah peluru dilemparkan tegak lurus ke atas dari titik A di tanah, kemudian di puncak ketinggiannya peluru tersebut terbelah menjadi dua bagian massa m_1 dan m_2 dengan $m_2 = 1,5m_1$. Dua bagian tersebut mencapai tanah pada jarak horizontal yang sama terhadap titik A , tetapi dengan beda waktu sebesar $\Delta T = 2,5$ detik. Percepatan gravitasi g . Asumsikan proses pembelahan peluru tersebut bersifat seketika. Abaikan hambatan udara. Ketinggian peluru dari titik A saat terbelah adalah ... meter.
24. Pada gambar berikut, terdapat dua buah partikel (no. 1 dan 2) yang diam dan bermassa sama, masing-masing sebesar αm , serta sebuah partikel (no. 3) bermassa m yang bergerak ke kanan dengan kecepatan v . Tumbukan yang terjadi pada partikel-partikel tersebut bersifat lenting sempurna dan hanya pada satu dimensi. Agar banyaknya tumbukan yang terjadi hanya dua buah tumbukan saja, maka nilai α terbesar sama dengan ...



25. Sebuah silinder pejal bermassa $M = 3m$ dan jejari $R = 20$ cm dapat berotasi bebas terhadap sumbu horizontalnya. Sebuah tali tak bermassa dililitkan pada permukaan silinder, lalu sebuah beban bermassa $m = 1$ kg dipasang pada ujung tali. Mula-mula tali berada di bawah silinder dan posisi beban m tepat pada garis putus-putus. Beban kemudian dinaikkan setinggi $h = 45$ cm dan dilepaskan tanpa kecepatan awal. Abaikan hambatan udara. Percepatan gravitasi g . Gunakan asumsi bahwa pada keadaan yang ditanyakan tersebut tali tidak dapat mulur dan interaksi bersifat seketika. Besar kecepatan m ketika berada sedikit di bawah garis putus-putus adalah ... m/s.



Jawab. Idenya adalah tepat ketika balok berada sedikit di bawah garis putus-putus, balok akan memberikan hentakan pada katrol lewat tali sehingga katrol mulai berputar. Di sini kita akan menggunakan hukum kekekalan momentum sudut untuk meninjau momentum sistem sebelum dan sesudah tumbukan, yakni sebelum dan sesudah balok melewati garis putus-putus. Pertama-tama, kecepatan balok ketika kembali di posisi semula, yakni pada garis putus-putus, adalah

$$v^2 = \overset{0}{v_0^2} - 2g(0 - h)$$

$$v = \sqrt{2gh} \dots (1)$$

Selanjutnya, gunakan hukum kekekalan momentum sudut. Setelah tumbukan, balok dan katrol bergerak bersama-sama dengan percepatan sudut tertentu karena tali tidak dapat mulur. Kita tuliskan balok sebagai m dan katrol sebagai M

$$I_m \omega_{m,i} + \overset{0}{I_M \omega_{M,i}} = (I_m + I_M) \omega'$$

$$mR^2 \left(\frac{v}{R} \right) = \left(mR^2 + \frac{1}{2}MR^2 \right) \frac{v'}{R}$$

$$mv = \left(m + \frac{M}{2} \right) v'$$

$$mv = \frac{M + 2m}{2} v'$$

$$v' = \frac{2mv}{M + 2m}$$

$$= \frac{2\mathcal{M}\sqrt{2gh}}{3\mathcal{M} + 2\mathcal{M}}$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{2gh}$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{2(9,8)(0,45)}$$

$$= 1,2 \text{ m/s} \quad \square$$

5. Usaha dan Energi

26. Tinjau sebuah balok bermassa $m = 1$ kg yang awalnya bergerak dengan kecepatan $v_0 = 4$ m/s kemudian didorong dengan gaya sebesar $F = 10$ N. Jika diketahui lantai licin, maka energi kinetik sistem ketika $t = 1,5$ detik adalah ... J.

Jawab. $v = v_0 + at$ untuk $v_0 = 4$ m/s, $a = \frac{F}{m} = \frac{10}{1} = 10$ m/s², dan $t = 1,5$ detik memberikan kita $v = 19$ m/s. Dengan demikian, energi kinetik sistem adalah $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 19^2 = 180,5$ J. $\square$

27. Sebuah koin mata uang logam (massa $m = 15$ gram dan jari $r = 2$ cm) menggelinding tanpa slip di atas meja datar dengan kecepatan 6 cm/detik. Energi kinetik yang dimiliki koin logam tersebut adalah ... μJ.

Jawab. Karena koin menggelinding, maka energi kinetiknya adalah energi kinetik translasi dan energi kinetik rotasi:

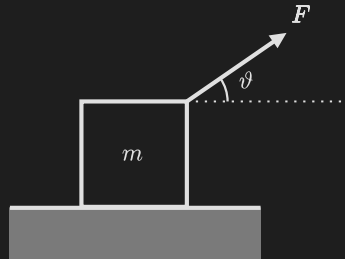
$$E_k = E_{kt} + E_{kr}$$

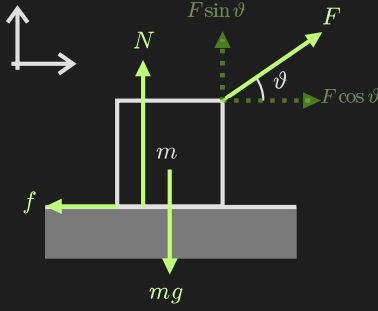
$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \dots (1)$$

Karena koin menggelinding tanpa slip, berlaku hubungan $v = r\omega$. Koin logam berbentuk silinder, yang memiliki momen inersia $I = \frac{1}{2}mr^2$ jika diputar melalui pusatnya. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}m \underbrace{r^2 \omega^2}_{v^2} & E_k &= \frac{3}{4} \cdot (15 \times 10^{-3}) (2 \times 10^{-2}) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 & &= 22,5 \times 10^{-5} \text{ J} \\ &= \frac{3}{4}mv^2 & &= 2,25 \times 10^{-6} \text{ J} \\ & & &= 2,25 \text{ } \mu\text{J} \quad \square \end{aligned}$$

28. Sebuah balok bermassa 4 kg yang awalnya diam ditarik oleh gaya $F = 50$ N yang membentuk sudut ϑ hingga bergerak, seperti pada gambar berikut. Jika diketahui lantai kasar dengan koefisien gesek kinetis $\mu_k = 0,4$, maka nilai $\cot \vartheta$ agar balok mencapai energi kinetik maksimum setelah bergerak sejauh 3 m adalah ...





Jawab. $\Sigma F_y = 0$ akan memberikan kita $N = mg - F \sin \vartheta$, sehingga $f = \mu_k N = \mu_k (mg - F \sin \vartheta)$.

Dengan mengambil arah kanan sebagai positif, usaha yang dilakukan oleh gaya F adalah $F \Delta s \cos \vartheta$, di mana Δs adalah perpindahan balok. Adapun usaha yang dilakukan oleh gaya gesek adalah $-f \Delta s$ yang bernilai negatif karena arah f berlawanan dengan Δs . Selanjutnya, gunakan teorema usaha-energi:

$$W = \Delta E_k$$

$$F \Delta s \cos \vartheta - f \Delta s = E_{k,f} - \underbrace{E_{k,i}}_0$$

$$F \Delta s \cos \vartheta - \mu_k (mg - F \sin \vartheta) \Delta s = E_{k,f}$$

$$E_{k,f} = F \Delta s \cos \vartheta + \mu_k F \Delta s \sin \vartheta - \mu_k mg \Delta s \dots (1)$$

$E_{k,f}$ akan maksimum ketika $\frac{d(E_{k,f})}{d\vartheta} = 0$:

$$\frac{d(E_{k,f})}{d\vartheta} = 0$$

$$\frac{d}{d\vartheta} (F \Delta s \cos \vartheta + \mu_k F \Delta s \sin \vartheta - mg \Delta s) = 0$$

$$-F \cancel{\Delta s} \sin \vartheta + \mu_k F \cancel{\Delta s} \cos \vartheta = 0$$

$$\mu_k \cos \vartheta = \sin \vartheta$$

$$\cot \vartheta = \frac{1}{\mu_k} = \frac{1}{0,2} = 5,0 \quad \square$$

29. Sebuah partikel bermassa $m = 3$ kg bergerak pada lintasan bidang- xy dengan persamaan

$$x = x_0 \cos(\omega_1 t)$$

$$y = y_0 \sin(\omega_2 t).$$

Diketahui $x_0 = 3,5$ meter, $y_0 = 2$ meter, $\omega_1 = 3$ rad/detik, $\omega_2 = 7$ rad/detik. Gaya yang bekerja pada partikel tersebut adalah gaya konservatif. Di titik asal O , besar energi potensial sama dengan nol. Suatu saat, energi potensial partikel tersebut sama dengan 270 joule. Besar energi kinetik partikel pada saat tersebut adalah ... joule.

Jawab. $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, tetapi hanya posisi benda yang diketahui. Bagaimana cara menemukan v ? Karena kecepatan adalah turunan waktu dari perpindahan/posisi, maka kita bisa menurunkan x dan y untuk mendapatkan kecepatan pada masing-masing sumbu:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega_1 x_0 \sin(\omega_1 t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \omega_2 y_0 \cos(\omega_2 t)$$

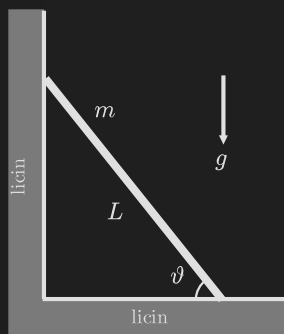
Selanjutnya, besar kecepatan partikel adalah

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 \\ v^2 &= \omega_1^2 x_0^2 \sin^2(\omega_1 t) + \omega_2^2 y_0^2 \cos^2(\omega_2 t) \\ &= (3)^2 \cdot (3,5)^2 \cdot \sin^2(3 \cdot 0) + (7)^2 (2)^2 \cdot \cos^2(7 \cdot 0) \\ &= 196 \text{ m}^2 / \text{s}^2 \quad \dots (1) \end{aligned}$$

Terakhir, karena gaya yang bekerja pada partikel adalah gaya konservatif, maka energi mekanik terkonservasi sehingga kita bisa gunakan hukum konservasi energi mekanik. Kita akan tinjau partikel pada titik asal sebagai kondisi awal dan ketika energi potensial partikel sebesar 270 J sebagai kondisi akhir:

$$\begin{aligned} E_{m,i} &= E_{m,f} \\ E_{k,i} + \underbrace{E_{p,i}}_0 &= E_{k,f} + E_{p,f} \\ \frac{1}{2}mv^2 &= E_{k,f} + 270 \\ E_{k,f} &= \frac{1}{2}(3)(196) - 270 \\ &= 294 - 270 = 24,0 \text{ J} \quad \square \end{aligned}$$

30. Sebuah batang seragam bermassa m dan panjang ℓ bersandar pada dinding vertikal licin dan mula-mula membentuk sudut awal $\vartheta = \vartheta_0$ terhadap bidang horizontal licin. Karena pengaruh gravitasi, batang tersebut akan slip dan bergerak ke bawah. Pada sudut $\vartheta = \vartheta_1$, batang mulai kehilangan kontak dengan dinding vertikal. Pada keadaan tersebut, perbandingan antara energi kinetik batang dengan energi potensial gravitasi batang bernilai sama dengan ...



Jawab. Kondisi ini sama persis dengan soal nomor 16. Kita akan gunakan hasil dari nomor tersebut. Energi kinetik batang adalah

$$E_k = \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\vartheta}^2 \dots (1)$$

di mana

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{3g}{\ell} (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \dots (2)$$

dan energi potensialnya adalah

$$E_p = \frac{mg\ell \cos \vartheta}{2} \dots (3)$$

Ketika batang lepas kontak dengan dinding, $\vartheta = \vartheta_1$ dan telah ditemukan bahwa hubungan antara ϑ_0 dan ϑ_1 adalah

$$\cos \vartheta_1 = \frac{2}{3} \cos \vartheta_0 \dots (4)$$

Dengan demikian, menggabungkan persamaan (1) sampai (4), perbandingan antara energi kinetik batang dengan energi potensial gravitasi batang adalah

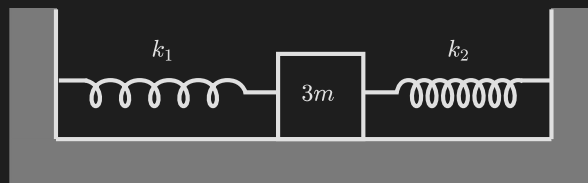
$$\begin{aligned} \frac{E_k}{E_p} &= \frac{\frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\vartheta}^2}{\frac{mg\ell \cos \vartheta_1}{2}} \\ &= \frac{\ell \dot{\vartheta}^2}{3g \cos \vartheta_1} \\ &= \frac{\ell}{3g \left(\frac{2}{3} \cos \vartheta_0 \right)} \left(\frac{3g}{\ell} (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta_1) \right) \\ &= \frac{3(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta_1)}{2 \cos \vartheta_0} \\ &= \frac{3 \left(\cancel{\cos \vartheta_0} - \frac{2}{3} \cancel{\cos \vartheta_0} \right)}{2 \cancel{\cos \vartheta_0}} \\ &= \frac{3 \left(\frac{1}{3} \right)}{2} = 0,5 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

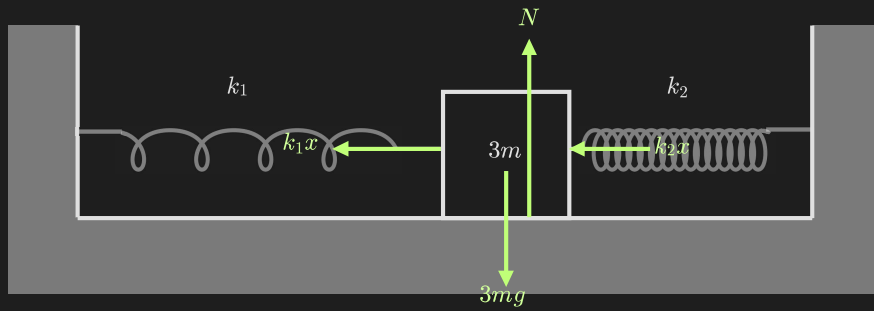
6. Osilasi

31. Suatu sistem pegas bermassa digantungkan secara vertikal. Dari keadaan setimbangnya, massa ditarik sejauh 2 cm sehingga mengalami osilasi dengan periode 3,14 detik. Apabila pegas kemudian disimpangkan sejauh 6 cm dari titik setimbangnya, maka periode osilasinya sekarang adalah ... detik.

Jawab. Periode osilasi pegas adalah $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, yang sama sekali tidak melibatkan simpangan pegas. Dengan demikian, periode untuk simpangan 2 cm maupun 6 cm sama-sama $T = 3,14$ detik. $\blacksquare$

32. Balok bermassa $3m$ ($m = 100$ gram) dihubungkan dengan dua pegas yang memiliki tetapan pegas $k_1 = 30$ N/m dan $k_2 = 14$ N/m (lihat gambar) sehingga dapat berosilasi. Balok terletak di atas lantai horizontal licin dan massa kedua pegas dapat diabaikan. Jika pegas kendur ketika balok dalam keadaan setimbang, maka frekuensi osilasi balok adalah ... Hz.





Jawab. Misalkan pegas disimpangkan, entah ke kiri ataupun ke kanan, sejauh x . Mari kita pilih menyimpangkannya ke kanan. pegas k_2 akan mendorong balok $3m$ ke kiri, sedangkan pegas k_1 akan menarik balok $3m$ ke kiri. Akibatnya, terdapat gaya pemulih akibat kedua pegas tersebut ke arah kiri.

$$\Sigma F_x = ma$$

$$-k_1x - k_2x = 3ma$$

$$-\frac{(k_1 + k_2)}{3m}x = a$$

$$a + \frac{(k_1 + k_2)}{3m}x = 0$$

Kita dapatkan persamaan yang analog dengan persamaan GHS $a + \omega^2 x = 0$ sehingga

$$\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{3m}$$

$$4\pi^2 f^2 = \frac{k_1 + k_2}{3m}$$

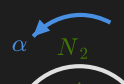
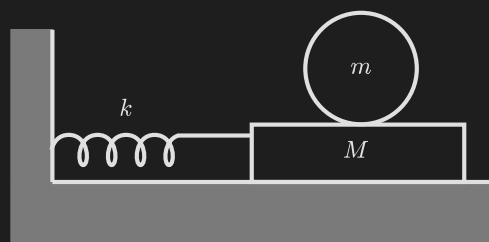
$$f^2 = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{k_1 + k_2}{3m}$$

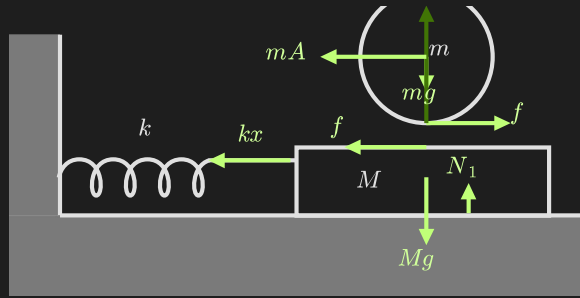
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{3m}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{30 + 14}{3 \cdot 0,1}}$$

$$= 1,9 \text{ Hz} \quad \square$$

33. Sebuah papan bermassa $M = 100$ gram berada di atas lantai licin dan terhubung dengan dinding di sebelah kirinya melalui pegas tak bermassa dengan konstanta pegas $k = 20$ N/m. Di atas papan tersebut diletakkan silinder bermassa $m = 500$ gram yang kasar sehingga silinder tersebut tidak akan slip ketika bergerak relatif terhadap papan. Jika kemudian papan diberi simpangan kecil, maka periode osilasi sistem ini adalah ... detik.





Jawab. Mari kita simpangkan pegas dengan menariknya ke kanan. Misalkan r adalah jari-jari silinder, α percepatan sudut silinder, a percepatan silinder relatif terhadap papan M (arah ke kiri), A percepatan papan relatif terhadap tanah (arah ke kanan). Momen inersia silinder yang berputar terhadap sumbu pusatnya adalah $I = \frac{1}{2}mr^2$. Karena silinder tidak slip, berlaku hubungan $a = r\alpha$. Meninjau silinder relatif terhadap papan,

Silinder

Hukum II Newton:

$$\Sigma \tau = I\alpha$$

$$fr = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

$$\Sigma F = ma$$

$$mA - f = ma$$

$$f = \frac{1}{2}mra$$

$$f = mA - ma \dots (2)$$

$$= \frac{1}{2}ma \dots (1)$$

Substitusikan (1) ke (2):

$$\frac{1}{2}ma = mA - ma$$

$$A = \frac{3}{2}a$$

$$a = \frac{2}{3}A \dots (3)$$

Papan

Hukum II Newton:

$$\Sigma F = MA$$

$$-kx - f = MA$$

$$-kx - \frac{1}{2}ma = MA$$

$$-kx - \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}A\right) = MA$$

$$-kx - \frac{1}{3}mA = MA$$

$$\left(M + \frac{1}{3}m\right)A + kx = 0$$

$$A + \frac{k}{M + \frac{1}{3}m}x = 0$$

Ini analog dengan persamaan GHS, $a + \omega^2 x = 0$. Jadi,

$$\omega^2 = \frac{k}{M + \frac{1}{3}m}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{M + \frac{1}{3} m}$$

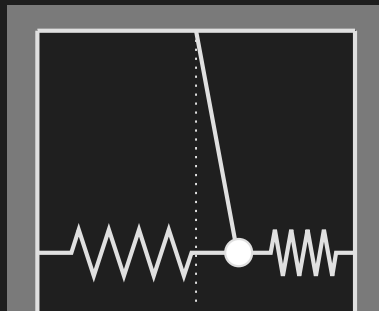
$$T^2 = 4\pi^2 \left(\frac{M + \frac{1}{3} m}{k} \right)$$

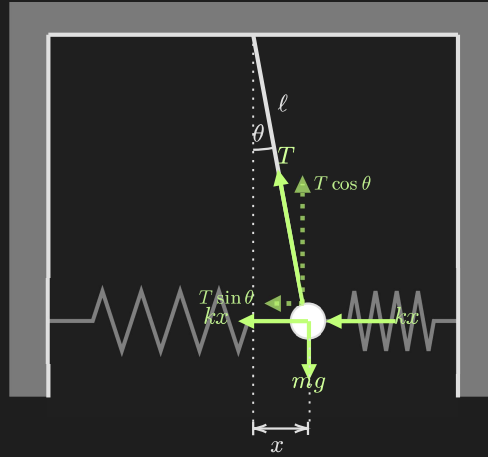
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M + \frac{1}{3} m}{k}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{0,1 + \frac{1}{3} (0,5)}{20}}$$

$$= 0,73 \text{ detik} \quad \square$$

34. Sebuah bandul bermassa $m = 100$ gram tergantung di langit-langit dengan tali tak bermassa sepanjang $\ell = 5$ meter dalam keadaan setimbang, dan terkait dengan dua pegas horizontal identik dengan konstanta pegas sebesar $k = 0,1$ N/m di kanan dan kirinya, seperti terlihat pada gambar. Jika kemudian bandul tersebut disimpangkan dengan sudut simpangan awal yang sangat kecil, maka periode osilasi bandul adalah ... detik.





Jawab. Pegas sebelah kanan akan mendorong bandul ke kiri sebagai reaksi karena ditekan ke kanan, sedangkan pegas sebelah kiri akan menarik bandul ke kiri sebagai reaksi karena ditarik ke kanan. Secara total, gaya pegas yang diberikan keduanya adalah $2kx$ ke arah kiri. Bandul hanya akan bergerak secara horizontal sehingga $\Sigma F_y = 0$, yang mengakibatkan $T = \frac{mg}{\cos \theta}$.
Pada sumbu- x :

$$\Sigma F_x = ma$$

$$-2kx - T \sin \theta = ma$$

$$-2k\ell \sin \theta - T \sin \theta = m\alpha\ell$$

$$-\left(2k\ell + \frac{mg}{\cos \theta}\right) \sin \theta = m\alpha\ell$$

Karena simpangan awal sangat kecil, kita bisa gunakan aproksimasi sudut kecil, yakni $\cos \theta \approx 1$ dan $\sin \theta \approx \theta$:

$$-(2k\ell + mg)\theta = m\alpha\ell$$

$$-\left(\frac{2k\ell + mg}{m\ell}\right)\theta = \alpha$$

$$-\left(\frac{2k}{m} + \frac{g}{\ell}\right)\theta = \alpha$$

$$\alpha + \left(\frac{2k}{m} + \frac{g}{\ell}\right)\theta = 0$$

Kita dapatkan persamaan gerak yang analog dengan $\alpha + \omega^2\theta = 0$. Dengan demikian,

$$\omega^2 = \frac{2k}{m} + \frac{g}{\ell}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{2k}{m} + \frac{g}{\ell}$$

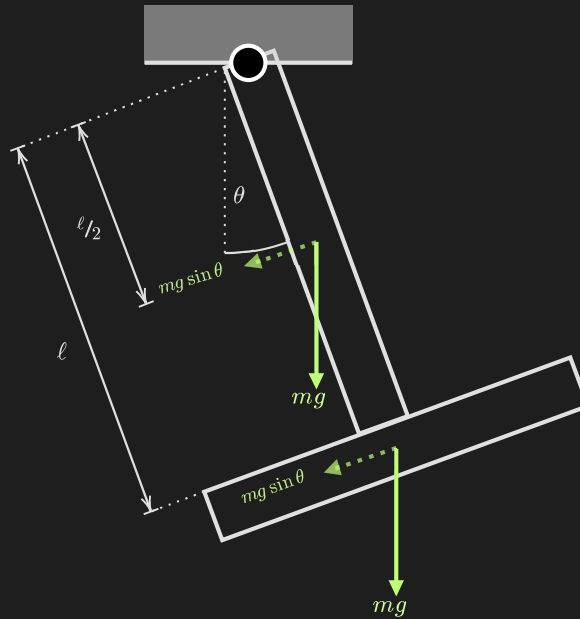
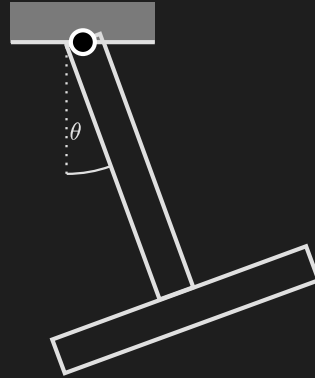
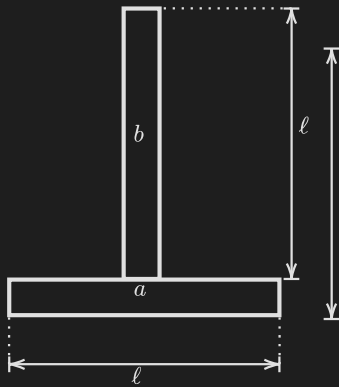
$$T^2 = 4\pi^2 \left(\frac{1}{\frac{2k}{m} + \frac{g}{\ell}} \right)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{2k}{m} + \frac{g}{\ell}}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{2(0,1)}{(0,1)} + \frac{9,8}{5}}}$$

$$= 3,2 \text{ detik} \quad \square$$

35. Dua batang homogen yang identik (a dan b), masing-masing memiliki panjang $\ell = 13$ cm dan massa $m = 150$ gram, disusun membentuk huruf T di mana pusat massa batang a berada di ujung batang b . Jika sistem tersebut lalu diberi simpangan kecil, maka frekuensi osilasi batang tersebut adalah ... Hz.



Jawab. Kita harus mencari momen inersia sistem dahulu. Sistem akan berotasi terhadap ujung atas batang b . Momen inersia batang b jika diputar terhadap ujungnya adalah $I_b = \frac{1}{3}m\ell^2$. Batang a dipasang pada tengah-tengahnya sehingga akan berputar terhadap pusatnya dengan momen inersia sebesar $I_a = \frac{1}{12}m\ell^2$.

Akan tetapi, kini sumbu rotasi batang a dipindah: dari pusat batang a ke suatu titik yang berjarak $d = \ell$ dari sumbu sebelumnya. Berdasarkan teorema sumbu sejajar, momen inersia batang a yang baru adalah

$$I_a' = \frac{1}{12}m\ell^2 + md^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\ell^2 = \frac{13}{12}m\ell^2 \dots (1)$$

Dengan demikian, momen inersia sistem adalah

$$I_{total} = I_a' + I_b = \frac{13}{12}m\ell^2 + \frac{1}{3}m\ell^2 = \frac{17}{12}m\ell^2 \dots (2)$$

Torsi yang bekerja pada poros (tanda minus diberikan untuk gaya pemulih, lalu untuk sudut kecil berlaku $\sin \theta \approx \theta$):

$$\Sigma \tau = I\alpha$$

$$-mg\left(\frac{\ell}{2}\right)\sin \theta - mg\ell \sin \theta = \frac{17}{12}m\ell^2 \alpha$$

$$-\frac{3g \sin \theta}{2} = \frac{17\ell}{12} \alpha$$

$$\alpha = -\frac{18g}{17\ell} \sin \theta$$

$$\alpha \approx -\frac{18g}{17\ell} \theta$$

$$\alpha + \frac{18g}{17\ell}\theta = 0$$

Kita dapatkan persamaan gerak yang analog dengan $\alpha + \omega^2\theta = 0$. Dengan demikian,

$$\omega^2 = \frac{18g}{17\ell}$$

$$4\pi f^2 = \frac{18g}{17\ell}$$

$$f^2 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{18g}{17\ell}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{18g}{17\ell}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{18 \cdot 9,8}{17 \cdot (0,13)}}$$

$$= 1,4 \text{ Hz} \quad \square$$

7. Hukum Gravitasi dan Hukum Kepler

36. Seorang astronom amatir mengamati bahwa suatu planet yang tak dikenal di Tata Surya memiliki orbit berbentuk elips dengan sumbu semi-mayornya $a = 45R_E$ dengan R_E merupakan jejari revolusi Bumi. Jika saat pengamatan planet berada di dekat matahari, berapa tahun lagi planet tersebut dapat diamati di posisi yang sama?

Jawab. Kunci utama dari soal ini adalah menggunakan hukum III Kepler tentang gerakan benda langit. Periode Bumi adalah $T_E = 1$ tahun. Misalkan planet tak dikenal tersebut adalah planet X . Pada orbit berbentuk elips, sumbu semi-mayor berperan layaknya jari-jari pada lingkaran, sehingga hukum III Kepler memberikan

$$\frac{T_E^2}{R_E^3} = \frac{T_X^2}{a^3}$$

$$\frac{T_E^2}{R_E^3} = \frac{T_X^2}{45^3 R_E^3}$$

$$T_X^2 = 45^3 \cdot T_E^2$$

$$T_X = 301,869 \cdot T_E$$

$$= 301,9 \text{ tahun} \quad \square$$

37. Sebuah asteroid kecil bergerak dengan kecepatan awal v dari tempat yang sangat jauh mendekati sebuah bintang dengan massa M dan jejari R . Seandainya lintasan asteroid tersebut tidak dibelokkan oleh gaya gravitasi bintang, maka jarak minimum antara asteroid dengan bintang sama dengan $b = 90R$. Konstanta gravitasi universal adalah G . Jika nilai minimum v agar asteroid tidak menabrak permukaan bintang adalah v_0 , maka dengan menyatakan bentuk $n = \frac{GM}{Rv_0^2}$, nilai n sama dengan ...

8. Mekanika Fluida

38. Suatu tetes air hujan jatuh vertikal dalam suatu kabut sangat tebal yang menyelimuti hingga permukaan tanah, sehingga massa tetes air hujan bertambah seiring berjalannya waktu. Tetes air hujan tersebut tetap berbentuk bola, di mana laju pertambahan massanya sebanding dengan kecepatan dan kuadrat jari-jarinya. Titik air hujan tersebut mula-mula jatuh tanpa kecepatan awal dari ketinggian awal $h_0 = 875$ meter di atas permukaan tanah dengan ukuran jari-jari yang sangat kecil dan dapat diabaikan. Anggap rapat massa air hujan selalu tetap. Percepatan gravitasi g . Waktu yang diperlukan tetes air hujan hingga mencapai permukaan tanah adalah ... detik.
39. Tinjau di dasar Samudra Hindia (di sepanjang Pulau Jawa) terdapat palung laut pada kedalaman $h = 11$ km. Diketahui kerapatan air laut di permukaan adalah $\rho_0 = 1025 \text{ kg.m}^{-3}$ dan modulus Bulk air laut adalah $B = 2.1 \text{ GPa}$. Besarnya tekanan air di dasar palung tersebut adalah ... atm.
40. Sebuah benda bermassa $m = \pi \text{ kg}$ memiliki lubang pada kedua sisinya yang berhubungan satu sama lain. Lubang di sisi kiri dan kanan masing-masing memiliki jari-jari $r_1 = 5 \text{ cm}$ dan $r_2 = 3 \text{ cm}$. Abaikan gravitasi pada soal ini. Terdapat aliran fluida (

$\rho = 11,10 \text{ kg/m}^3$) yang disemburkan ke lubang kiri dengan kelajuan $v = 10 \text{ m/s}$. Kelajuan balok setelah $t = 2,5 \text{ s}$ adalah ... m/s.

