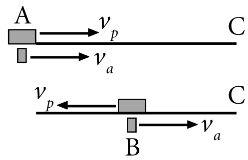
# 1 Soal Jawab Mekanika

***1.1.*** *(Kecepatan relatif) Sebuah perahu berlayar di sungai. Dalam perjalanannya perahu melewati sebuah botol di titik A. Satu jam kemudian perahu berbalik arah dan berpapasan dengan botol tadi pada jarak 6 km dari titik A. Kecepatan perahu konstan. Hitung kecepatan arus sungai!*




***Jawab:*** Pada diagram di atas anggap perahu berbalik di titik C (abaikan perubahan kecepatan selama berbelok) dan bertemu kembali dengan botol di titik B.

Anggap kecepatan perahu relatif terhadap arus sungai adalah $V_p$ dan kecepatan arus sungai terhadap tanah adalah $V_a$. Kecepatan perahu relatif terhadap tanah (perjalanan A ke C) adalah $V_p + V_a$. Sedangkan dari C ke B kecepatan perahu relatif terhadap tanah adalah $V_p - V_a$.

Dari gambar terlihat bahwa:

$$AC = AB + BC \text{ (untuk perahu)}$$

$$V_{\mathrm{AC}} \bullet t_{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB} + V_{\mathrm{BC}} \bullet t_{\mathrm{BC}}$$

$$V_{\mathrm{AC}} \bullet t_{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB} + V_{\mathrm{BC}} \bullet (t_{\mathrm{AB(botol)}} - t_{\mathrm{AC(perahu)}})$$

$$(V_p + V_a) \bullet 1 = 6 + (V_p - V_a)\left(\frac{AB}{V_a} - t_{\mathrm{AC}}\right)$$

$$(V_p + V_a) = 6 + (V_p - V_a)\left(\frac{6}{V_a} - 1\right)$$

Selesaikan persamaan di atas kita akan peroleh: $\mathbf{V_a = 3{,}0}$ **km/jam**.

**Cara cerdik**: waktu yang diperlukan perahu dari A ke C adalah 1 *jam*. Waktu dari C ke B pasti 1 jam pula. Jadi waktu A-C-B adalah 2 *jam*. Waktu ini sama dengan waktu yang diperlukan botol dari A ke B. Jadi kecepatan arus (kecepatan botol) adalah 6 km/2 jam = $\boxed{\textbf{3 km/jam}}$.

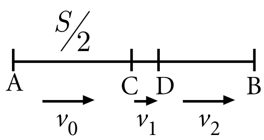
(Diskusikan mengapa waktu yang diperlukan dari C ke B itu 1 jam pula!)

***1.2.*** *Sebuah mobil bergerak dari A ke B melewati titik C dan D (titik C terletak di tengah-tengah A dan B). Dari A ke C mobil bergerak dengan kecepatan $v_0$. Dari C ke D mobil bergerak dengan kecepatan $v_1$ dalam waktu setengah waktu C ke B. Sisa perjalanan ditempuh dengan kecepatan $v_2$. Hitung kecepatan rata-rata mobil ini!*

***Jawab:*** Kecepatan rata-rata didefinisikan sebagai perpindahan dibagi waktu tempuh.

$$\overline{V} = \frac{S_{AB}}{t_{AB}}$$

Anggap $S_{AB} = S$, $t_{AC} = t_1$ dan $t_{CB} = t_2$.




Dari gambar tampak bahwa: $t_1 = \dfrac{S/2}{v_0}$

$$S_{CD} + S_{DB} = v_1 \frac{1}{2} t_2 + v_2 \frac{1}{2} t_2$$

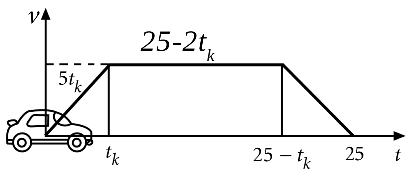
atau

$$t_2 = \frac{S_{CD} + S_{DB}}{\frac{1}{2}(v_1 + v_2)} = \frac{\frac{1}{2} S}{\frac{1}{2}(v_1 + v_2)}$$

Karena $t_{AB} = t_1 + t_2$ maka kecepatan rata-rata mobil ini adalah:

$$\boxed{\overline{V} = \frac{S}{\frac{S}{v_1 + v_2} + \frac{S}{2v_0}} = \frac{2v_0 (v_1 + v_2)}{v_1 + v_2 + 2v_0}}$$

***1.3.*** *Sebuah mobil bergerak lurus dipercepat dari keadaan diam dengan percepatan $a = 5$ m/s$^2$. Mobil kemudian bergerak dengan kecepatan konstan. Setelah beberapa saat mobil diperlambat dengan perlambatan $a = 5$ m/s$^2$ hingga berhenti. Jika kecepatan rata-rata mobil itu 20 m/s dan waktu total pergerakan adalah 25 detik, hitung berapa lama mobil bergerak dengan kecepatan tetap?*




***Jawab:*** Cara termudah untuk menyelesaikan soal ini adalah dengan metode grafik seperti ditunjukan pada gambar.

Anggap mobil mulai melakukan gerak lurus beraturan (kecepatan konstan) pada waktu $t_k$.

Luas trapesium (lihat gambar) yang menyatakan perpindahan mobil adalah:

$$S = \frac{(25 + 25 - 2t_k)\, 5t_k}{2}$$

Karena kecepatan rata-rata:

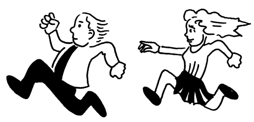
$$\overline{V} = \frac{S}{t_{total}}$$

maka,

$$20 = \frac{125t_k - 5t_k^2}{25}$$

atau

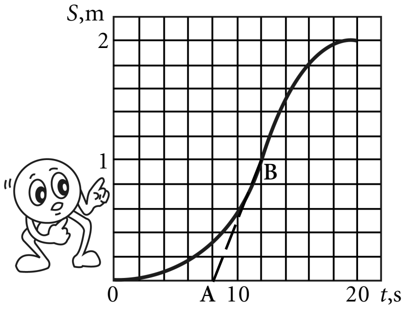
$$t_k^2 - 25t_k + 100 = 0$$
$$(t_k - 20)(t_k - 5) = 0$$



Jadi $t_k = 5$ detik (mengapa $t_k = 20$ detik tidak boleh dipilih?)

Waktu yang dipakai mobil untuk bergerak dengan kecepatan konstan dalah $25 - 2t_k =$ **15 detik**.

***1.4.*** *Seekor semut bergerak lurus dengan lintasan sesuai dengan grafik pada gambar. Dari grafik ini tentukan:*
*a) kecepatan rata-rata selama gerakan!*
*b) kecepatan maksimum!*

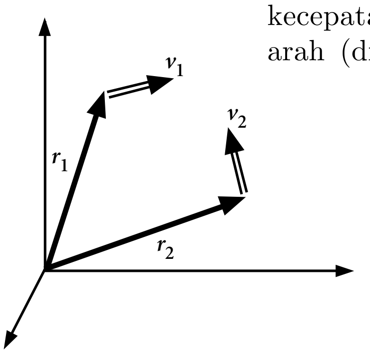



***Jawab:***

a) Kecepatan rata-rata adalah besarnya perpindahan dibagi waktu total. Dari grafik tampak bahwa semut memerlukan waktu 20 detik untuk menempuh jarak 2 meter. Jadi kecepatan rata-ratanya: $\boxed{2/20 = \textbf{0,1 m/s}}$.

b) Kecepatan maksimum diperoleh dengan menghitung kemiringan maksimum dari grafik ini. Terlihat bahwa kemiringan (gradien) garis singgung maksimum (garis AB) adalah: $\boxed{1/4 = \textbf{0,25 m/s}}$.

***1.5.*** *Dua ekor kumbang A dan B bergerak lurus dengan kecepatan tetap* $\boldsymbol{v}_1$ *dan* $\boldsymbol{v}_2$*. Vektor posisi kedua partikel ini adalah* $\boldsymbol{r}_1$ *dan* $\boldsymbol{r}_2$*. Tentukan hubungan ke empat vektor ini agar kedua kumbang bertabrakan?*




***Jawab:*** Kedua kumbang bertabrakan jika **arah** vektor satuan kecepatan relatif dan arah vektor satuan posisi relatif berlawanan arah (diskusikan mengapa?).

Vektor satuan posisi relatif:

$$\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|} = \hat{r}$$

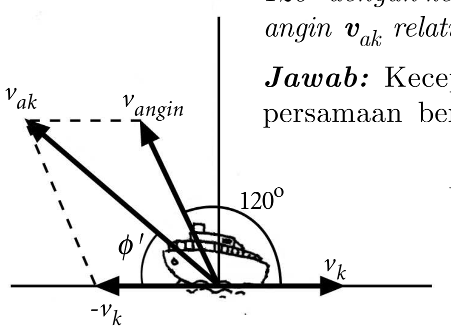
Vektor satuan kecepatan relatif:

$$\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\left|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right|} = \hat{v}$$

Arah vektor posisi relatif searah dengan vektor kecepatan relatif jika $\hat{r} = -\hat{v}$, jadi:

$$\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|} = -\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\left|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right|}$$

***1.6.*** *Suatu kapal laut bergerak sepanjang garis khatulistiwa menuju timur dengan kecepatan* $\boldsymbol{v}_k = 30$ *km/jam. Angin berhembus pada sudut* $\phi = 120°$ *dengan kecepatan* $\boldsymbol{v}_a = 15$ *km/jam (lihat gambar). Hitung kecepatan angin* $\boldsymbol{v}_{ak}$ *relatif terhadap kapal dan sudut* $\phi'$ *antara* $-\boldsymbol{v}_k$ *dan* $\boldsymbol{v}_{aa}$*!*




***Jawab:*** Kecepatan relatif angin terhadap kapal dinyatakan oleh persamaan berikut:

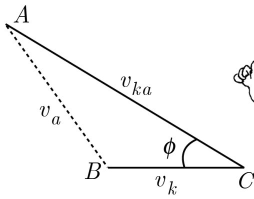
$$\boldsymbol{v}_{ak} = \boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{v}_k$$

Vektor $\boldsymbol{v}_{ak}$ digambarkan pada gambar di atas (perhatikan bahwa $\boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_a + (-\boldsymbol{v}_k)$.

Besar kecepatan ini adalah:

$$v_{ak} = \sqrt{(v_a)^2 + v_k^2 + 2\,(v_a)\,v_k \cos 60^\circ}$$

$$= \mathbf{39{,}7\ km/jam}$$




Untuk menghitung sudut $\phi'$ kita gunakan rumus cosinus:

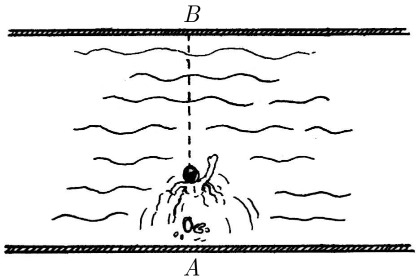
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \phi'$$

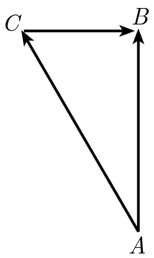
$$v_a^2 = v_{ak}^2 + v_k^2 - 2v_{ak}v_k \cos \phi'$$

Masukan nilai-nilai yang diberikan, kita akan peroleh:

$$\cos \phi' = 0{,}945 \text{ atau } \boxed{\phi' = 19^\circ}$$

***1.7.*** *Amir dan Lukas hendak menyebrangi sebuah sungai dari titik A ke titik B. Amir berusaha berenang pada garis lurus AB. Lukas berenang selalu tegak lurus arus. Ketika tiba diseberang, Lukas berjalan menuju B. Berapa kecepatan jalan kaki Lukas jika keduanya tiba di B pada waktu yang bersamaan? Kecepatan arus 2 km/jam dan kecepatan Amir dan Lukas terhadap air sama yaitu 2,5 km/jam.*



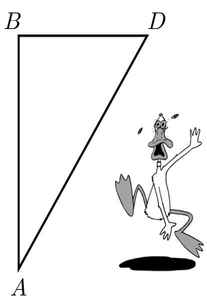




***Jawab:*** Amir harus mengarahkan dirinya pada titik C agar ia dapat berenang sepanjang garis AB.

Karena $V_{AC}$ = 2,5 km/jam dan $V_{CB}$ = 2 km/jam maka $V_{AB}$ = 1,5 km/jam (gunakan rumus Phytagoras).

Waktu dari A ke B adalah:

$$(t_{AB})_{Amir} = \frac{AB}{v_{AB}} = \frac{AB}{1{,}5}$$




Lukas pertama mencapai titik D. Dari D ia berjalan kaki ke B.

Waktu dari A ke D adalah:

$$t_{AD} = \frac{AD}{v_{AD}}$$

$$= \frac{AB}{v_{Lukas}}$$

$$= \frac{BD}{v_{arus}}$$

dari persamaan diatas kita peroleh,

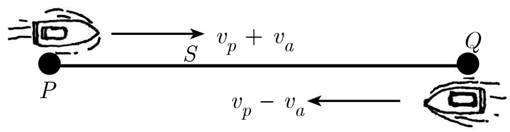
$$BD = \frac{v_{arus} AB}{v_{Lukas}} = \frac{2}{2,5} AB$$

Waktu yang diperlukan Lukas dari A ke B:

$$\begin{aligned}(t_{AB})_{\text{Lukas}} &= t_{AD} + t_{BD} \\ &= \frac{AB}{v_{Lukas}} + \frac{BD}{v_{jalan}} \\ &= \frac{AB}{2,5} + \frac{\frac{2}{2,5} AB}{v_{jalan}}\end{aligned}$$

Karena $(t_{AB})_{\text{Amir}} = (t_{AB})_{\text{Lukas}}$ maka kita peroleh $\boldsymbol{v_{jalan}} = \boxed{\textbf{3 km/jam}}$.

***1.8.*** *Dua perahu A dan B bergerak ditengah sungai sepanjang 2 garis yang saling tegak lurus. Perahu A searah dengan arah arus sedangkan perahu B tegak lurus arus. Kecepatan perahu terhadap air adalah 1,2 kali kecepatan arus. Setelah menempuh jarak yang sama kedua perahu kembali ke posisi semula. Hitung perbandingan waktu tempuh kedua perahu itu!*

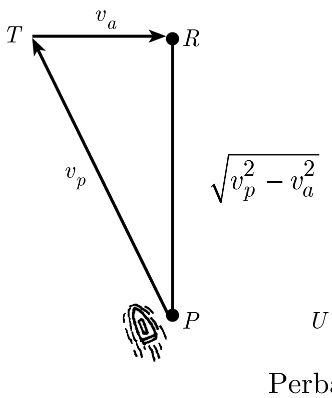


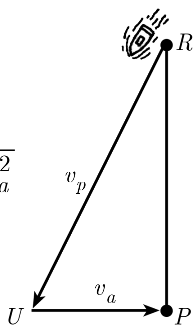

***Jawab:*** Anggap jarak yang ditempuh S. Perahu A bergerak dari P ke Q dengan kecepatan $v_p + v_a$ (kecepatan perahu + kecepatan arus) dan dari Q ke P dengan kecepatan: $v_p - v_a$.

Jadi waktu yang diperlukan oleh perahu A adalah:

$$t_A = \frac{S}{v_p + v_a} + \frac{S}{v_p - v_a}$$

Untuk mencapai titik R, perahu B harus diarahkan ketitik T (lihat gambar). Jadi kecepatan arah PR adalah:




$$v = \sqrt{v_p^2 - v_a^2}$$

Untuk balik dari R ke P perahu harus diarahkan kearah U. Kecepatan arah RP adalah:

$$v = \sqrt{v_p^2 - v_a^2}$$

Jadi waktu yang diperlukan oleh perahu B pada lintasan PRP adalah:

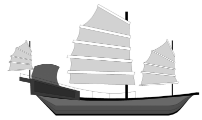
$$t_B = \frac{2S}{\sqrt{v_p^2 - v_a^2}}$$

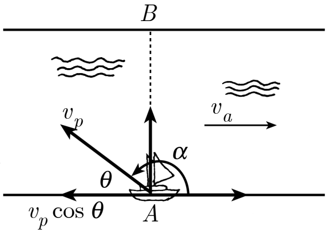
Perbadingan $t_A/t_B$ adalah:

$$\frac{t_A}{t_B} = \frac{2Sv_p}{v_p^2 - v_a^2} : \frac{2S}{\sqrt{v_p^2 - v_a^2}} = \frac{v_p}{\sqrt{v_p^2 - v_a^2}}$$

Dengan memasukkan $v_p = 1,2v_a$ kita peroleh $\boxed{t_A/t_B = \mathbf{1,8}}$.

**1.9.** *Sebuah perahu hendak menyebrangi suatu sungai dengan kecepatan 2 kali kecepatan aliran sungai. Tentukan pada sudut berapa perahu itu harus diarahkan agar pengaruh arus dapat dikurangi sebanyak mungkin!*






***Jawab:*** Anggap kecepatan arus $v_a$ dan kecepatan perahu $v_p = 2v_a$.

Dari gambar terlihat bahwa pengaruh arus akan seminimum mungkin jika perahu dapat bergerak dari A ke B tegak lurus arus.

Agar ini dapat terjadi, maka $v_p$ cos $\theta$ harus sama dengan $v_a$.

$$v_p \cos\theta = v_a$$

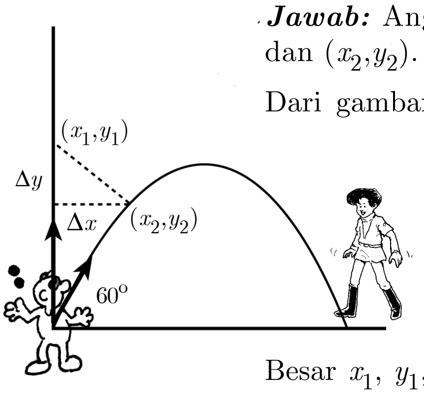
$$\cos\theta = \frac{v_a}{v_p} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^o$$

Jadi perahu harus diarahkan pada sudut $\alpha = 180^o - 60^o = \boxed{\mathbf{120^o}}$ terhadap arah arus.

**1.10.** *Dua batu dilemparkan dari suatu titik. Batu pertama dilemparkan vertikal sedangkan batu kedua dengan sudut elevasi 60°. Kecepatan mula-mula kedua batu 25 m/s. Hitung jarak kedua batu itu setelah 1,7 detik!*

***Jawab:*** Anggap posisi kedua batu setelah 1,7 detik adalah $(x_1,y_1)$ dan $(x_2,y_2)$.




Dari gambar diperoleh bahwa:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

Jarak kedua titik dapat dicari dengan rumus Phytagoras:

$$s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Besar $x_1$, $y_1$, $x_2$ dan $y_2$ diperoleh dari rumus berikut:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = v_0 \cos 60^o t$$

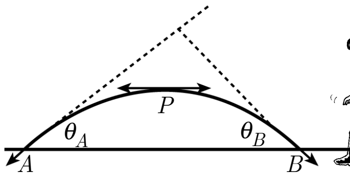
$$y_1 = v_0 t - \tfrac{1}{2} gt^2$$

$$y_2 = v_0 \sin 60^o t - \tfrac{1}{2} gt^2$$

Dengan memasukkan data yang diketahui kita peroleh $\boldsymbol{s} = \boxed{\mathbf{22\ m}}$.

**1.11.** *Dua peluru bergerak dalam suatu medan gravitasi. Percepatan gravitasi g arah vertikal ke bawah. Kedua peluru ditembakkan dengan arah mendatar saling berlawanan dari satu titik pada ketinggian tertentu. Kecepatan masing-masing peluru $v_{0A}$ = 3 m/s dan $v_{0B}$ = 4 m/s. Hitung jarak kedua peluru ketika kedua vektor kecepatannya saling tegak lurus!*

***Jawab:*** Pada gerak parabola, komponen kecepatan arah mendatar selalu konstan. Yang berubah adalah komponen arah vertikal (akibat gravitasi). Besar sudut antara komponen kecepatan vertikal dan mendatar untuk peluru A dan B adalah:




$$\tan\,\theta_A = \frac{v_{Ay}}{v_{Ax}} = \frac{gt}{v_{0A}}$$

$$\tan\,\theta_B = \frac{v_{By}}{v_{Bx}} = \frac{gt}{v_{0B}}$$

Rumus tangen:

$$\tan(\theta_A + \theta_B) = \frac{\tan\theta_A + \tan\theta_B}{1 - \tan\theta_A \tan\theta_B}$$

Kedua vektor kecepatan tegak lurus jika $\theta_{\mathrm{A}} + \theta_{\mathrm{B}} = 90^{\mathrm{o}}$.

Dengan menyelesaikan persamaan tangen diatas, kita peroleh;

$$t = \frac{\sqrt{v_{0A}v_{0B}}}{g}$$

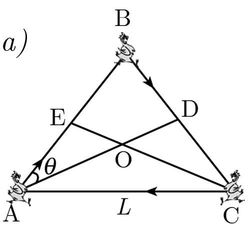
Selanjutnya kita hitung jarak kedua peluru:

$$s = x_A + x_B = v_{0A}t + v_{0B}t$$

Dengan memasukkan nilai-nilai yang diberikan, kita peroleh (ambil $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$) : $\boldsymbol{s} = \boxed{\textbf{2,4 m}}$.

***1.12.*** *Tiga buah titik terletak pada titik sudut suatu segitiga sama sisi yang panjang sisinya L. Ketiga titik ini bergerak bersamaan dengan kecepatan konstan v. Arah kecepatan titik pertama menuju titik kedua, titik kedua menuju titik ketiga dan titik ketiga menuju titik pertama. Kapan ketiga titik ini bertemu?*

*a)*

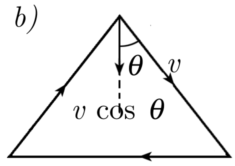



***Jawab:*** Coba Anda pikirkan bahwa ketiga titik ini akan bertemu di titik berat segitiga (titik O). Lintasan titik berbentuk kurva. Untuk menghitung waktu yang ditempuh titik kita cukup menghitung jarak AO lalu membaginya dengan komponen kecepatan arah AO. (Perhatikan bahwa komponen kecepatan arah AO selalu sama di setiap titik lintasan)

Jarak AO:

$$\mathrm{AO} = \frac{2}{3}\mathrm{AD} = \frac{L}{3}\sqrt{3}$$

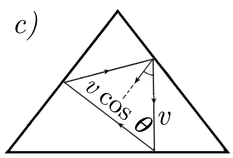
*b)*




Kecepatan arah AO:

$$v_{AO} = v\cos\,\theta = \boxed{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ V}$$

*c)*



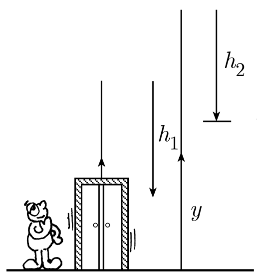

Jadi $t = {}^{AO}\!/_{v_{AO}} = {}^{\boldsymbol{2L}}\!/_{\boldsymbol{3v}}$.

*__1.13.__ Sebuah lift yang tingginya 3 meter bergerak ke atas dengan percepatan 2 m/s². Setelah bergerak 3 detik. Sebuah baut jatuh dari langit-langit lift. Hitung:*
*a) waktu yang diperlukan baut untuk mencapai lantai lift,*
*b) perpindahan baut selama jatuh,*
*c) jarak yang ditempuh baut.*
*Ambil $g$ = 10 m/s².*

*Jawab:*

a) Ketika lift diam, orang yang berdiri di lantai lift akan melihat baut jatuh bebas dengan percepatan $a$ = 10 m/s$^2$. Tetapi ketika lift dipercepat ke atas dengan 2 m/s$^2$, orang akan melihat baut lebih cepat menyentuh lantai lift. Dengan kata lain percepatan baut menjadi: $a' = 10 + 2 = 12$ m/s$^2$.

Karena tinggi lift $h$ = 3 meter maka dengan menggunakan rumus $h = \frac{1}{2} a' t^2$ kita akan peroleh $t = \boxed{\text{0,71 detik.}}$




b) Perpindahan baut diukur oleh orang yang di luar lift. Menurut orang ini, gerakan baut adalah seperti gerakan benda yang dilemparkan ke atas dengan kecepatan awal sama dengan kecepatan lift setelah 3 detik, $v_0 = at' = 2(3) = 6$ m/s. Perpindahan dapat dicari dengan rumus:

$$y = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

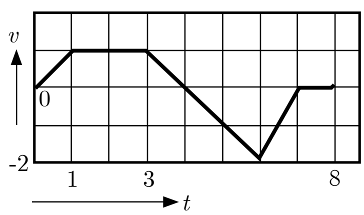
Dengan memasukkan $t$ = 0,707 detik kita peroleh perpindahan baut sebesar: $\boldsymbol{y} = \boxed{\textbf{1,74 m}}$.

c) Untuk menghitung jarak yang ditempuh baut ($h_1 + h_2$) kita perlu menghitung dulu titik tertinggi yang dicapai oleh baut.

$$\begin{aligned}
v &= v_0 - gt \\
0 &= 6 - 10t \\
t &= 0{,}6 \ \textit{detik} \\
h_1 &= v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \\
&= 6(0{,}6) - 5(0{,}6^2) \\
&= 1{,}8 \text{ m (tinggi maksimum)} \\
h_2 &= h_1 - y = 0{,}06 \text{ m}
\end{aligned}$$

Jadi jarak yang ditempuh baut adalah: 1,8 + 0,06 = $\boxed{\textbf{1,86 m}}$.

*__1.14.__ Suatu titik bergerak sepanjang sumbu x dengan kecepatan seperti yang digambarkan pada gambar di bawah. Gambarkan S(t) dan a(t)! Satuan dalam SI (sistem MKS).*




***Jawab:*** Dari gambar diperoleh data sebagai berikut:

0-1 detik: a = +1 $m/s^2$ (dipercepat)

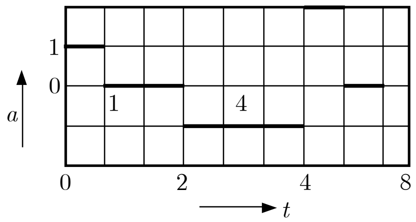
1-3 detik: a = 0

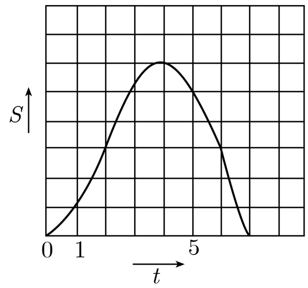
3-4 detik: a = -1 $m/s^2$ (diperlambat)

4-6 detik: a = -1 $m/s^2$ (dipercepat)

6-7 detik: a = +2 $m/s^2$ (diperlambat)

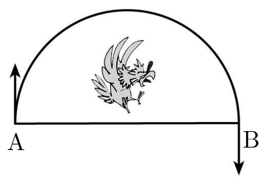
7-8 detik: a = 0


Untuk menggambar $S(t)$ kita harus perhatikan lengkung kurva (tergantung dari tanda percepatannya).

**1.15.** *Sebuah titik melintasi setengah lingkaran berjari-jari 2 m selama 10 detik dengan laju konstan. Hitung besar kecepatan rata-rata titik ini. Berapa laju titik ini? Berapa besar percepatan rata-rata titik ini?*




***Jawab:*** Mula-mula titik berada di A dan posisi akhirnya di B. Perpindahan titik adalah $2R$ (jarak yang ditempuh titik adalah $\pi R$). Jadi kecepatan rata-rata titik adalah:

$$(\bar{v}) = \frac{2R}{t} = \frac{2 \cdot 2}{10} = \boxed{0{,}4 \text{ m/s}}$$

Kecepatan rata-rata ini arahnya mendatar. (Mengapa?)

Laju titik ini:

$$v = \frac{\pi R}{t} = \frac{2}{10}\pi = \boxed{0{,}63 \text{ m/s}}$$

Percepatan rata-rata adalah perubahan kecepatan dibagi waktu. Mula-mula kecepatan arah ke atas (titik A) dan setelah itu arah ke bawah (titik B), nilai perubahan kecepatan adalah $2v$. Jadi nilai percepatan rata-ratanya $2v/t = \boxed{\mathbf{0{,}126\ m/s^2}}.$

**1.16.** *Sebuah benda dilontarkan dari permukaan bumi dengan sudut elevasi $\theta$ dan dengan kecepatan awal $v_0$. Abaikan hambatan udara, hitung:*

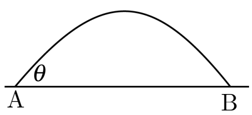
*a) waktu agar benda sampai ke permukaan bumi lagi!*

*b) tinggi maksimum dan jangkauan mendatar! Pada sudut berapa kedua besaran ini sama besar?*

*c) y(x)!*

*d) jari-jari kelengkungan kurva di titik awal dan titik puncak!*

***Jawab:***




a) Anggap waktu dari A ke B adalah $t_1$.

$$y_B = y_A + v_{0y} \sin \theta\, t_1 - \tfrac{1}{2} g t_1^2$$

$$R = v_{0x} \cdot t_1$$

Masukkan nilai $y_A = 0$ dan $y_B = 0$, kita akan peroleh:

$$\boxed{t_1 = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}}$$

b) Jangkauan AB dihitung dengan:

$$x_{AB} = v_{0x} \cdot t_1 = \frac{2{v_0}^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

$$= \boxed{\frac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{g}}$$

Waktu untuk mencapai tinggi maksimum adalah:

$$t_2 = \tfrac{1}{2}\, t_1 = \frac{(v_0 \sin\theta)}{g}$$

Tinggi maksimum:

$$y_{maks} = v_{0y} \cdot t_2 - \tfrac{1}{2}\, g t_2^2$$

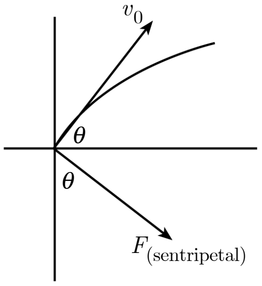
$$= \boxed{\frac{\left({v_0}^2 \sin^2\theta\right)}{2g}}$$

Tinggi maksimum akan sama dengan jangkauan AB pada $\boxed{\tan\boldsymbol{\theta} = 4}$ (gunakan $y_{maks} = x_{AB}$).

c) $x = v_{0x} \cdot t$ atau $t = \dfrac{x}{(v_0 \cos\theta)}$. Substitusi nilai $t$ ini pada rumus

$y = v_{0y} \cdot t - \tfrac{1}{2}\, gt^2$, untuk memperoleh,

$$y = x \tan\theta - \frac{gx^2}{2{v_0}^2 \cos^2\theta}$$



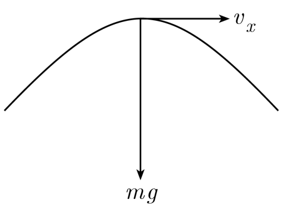

d) Jari-jari kelengkungan di titik awal dapat dihitung dengan rumus $a = v^2/R_1$

$$F_s = mg \cos\theta$$

atau

$$\boxed{R_1 = \frac{{v_0}^2}{g\cos\theta}}$$

Jari-jari kurva di titik tertinggi:




$$mg = \frac{mv_x^2}{R^2}$$

atau

$$\boxed{R_2 = \frac{v_0^2 \cos^2\theta}{g}}$$

**1.17.** *Viskositas $\eta$ suatu gas tergantung pada massa, diameter efektif dan kecepatan rata-rata molekul. Gunakan analisa dimensi untuk menentukan rumus $\eta$ sebagai fungsi variabel-variabel ini!*

***Jawab:*** Anggap bahwa: $\eta = km^{\alpha}d^{\beta}v^{\gamma}$
dimana *k, $\alpha$, $\beta$*, dan $\gamma$ merupakan konstanta tanpa dimensi, *m* massa berdimensi *M*, *d* diameter berdimensi *L* dan *v* kecepatan rata-rata molekul berdimensi $LT^{-1}$.
Karena dimensi viskositas adalah $ML^{-1}T^{1}$ maka:

$$ML^{-1}T^{1} = M^{\alpha}L^{\beta}(LT^{-1})^{\gamma}$$

Dengan menyamakan pangkat pada tiap dimensi, kita peroleh:

$$\alpha = 1;\ \beta = -2;\ \gamma = 1$$

Sehingga kita akan peroleh:

$$\boxed{\eta = k\left(\frac{mv}{d^2}\right)}$$

**1.18.** *Gunakan metode dimensi untuk memperoleh rumus gaya angkat pesawat per satuan panjang rentangan sayap pesawat. Pesawat bergerak dengan kecepatan v melalui udara dengan kerapatan $\rho$. Nyatakan rumusnya dalam l,v dan $\rho$ (l adalah lebar sayap)!*

***Jawab:*** Anggap gaya per satuan panjang rentangan adalah *F*.

$$F = kl^{\alpha}v^{\beta}\rho^{\gamma}$$

Karena dimensi gaya $MLT^{-2}$, maka dimensi gaya persatuan panjang adalah: $MT^{-2}$. Jadi:

$$MT^{-2} = L^{\alpha}(LT^{-1})^{\beta}(ML^{-3})^{\gamma}$$

Dengan menyamakan pangkat pada tiap besaran, kita peroleh:

$$\gamma = 1$$
$$\beta = 2$$
$$\alpha + \beta - 3\gamma = 0 \text{ atau } \alpha = 1$$

Sehingga rumus gaya angkat per satuan panjang adalah:

$$\boxed{F = klv^2\rho}$$

**1.19.** *Tentukan rumus kecepatan bunyi jika kecepatan ini tergantung pada tekanan P dan massa jenis udara $\rho$!*

***Jawab:*** Gunakan metode seperti soal 1.18. Silahkan buktikan bahwa :

$$\boxed{v = k\left(\frac{P}{\rho}\right)^{1/2}}$$

**1.20.** *Perioda suatu bandul tergantung pada panjang tali dan percepatan gravitasi. Tentukan rumus perioda bandul ini!*

***Jawab:*** Silahkan buktikan bahwa :

$$\boxed{T = k\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2}}$$

($l$ = panjang tali; $g$ = percepatan gravitasi)

**1.21.** *Sebuah mobil dipercepat dari keadaan diam dengan percepatan* $\alpha$. *Setelah itu mobil diperlambat dengan perlambatan* $\beta$ *hingga berhenti. Total waktu yang dibutuhkan adalah t detik. Berapa jarak yang ditempuh mobil ini?*

***Jawab:*** Anggap waktu selama mobil dipercepat hingga mencapai kecepatan $v$ adalah $t_1$ dan selama diperlambat $t_2$.

Pertama buktikan bahwa

$$t_1 = v/\alpha \;;\; t_2 = v/\beta$$

dan

$$t = t_1 + t_2$$

Misalkan jarak yang ditempuh selama dipercepat $s_1$ dan selama diperlambat $s_2$. Silahkan buktikan bahwa,

$$s_1 = v^2/2\alpha \;;\; s_2 = v^2/2\beta$$

dan

$$s = s_1 + s_2$$

Dari persamaan-persamaan ini kita peroleh:

$$\boxed{s = \tfrac{1}{2}\, t^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}}$$

**1.22.** *Sebuah batu dijatuhkan dari ketinggian h. Setelah t detik batu kedua dijatuhkan kebawah dengan kecepatan u. Apa kondisi agar kedua batu mencapai tanah bersama-sama?*

***Jawab:*** Batu pertama akan mencapai tanah setelah waktu: $t_1 = \left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2}$.

Waktu yang diperlukan agar batu kedua bersamaan jatuh ke tanah :

$$t_2 = t_1 - t$$

Gunakan rumus $h = ut_2 + \tfrac{1}{2}\, g t_2^2$ kita akan peroleh:

$$h = \frac{gt^2}{8}\left(\frac{2u - gt}{u - gt}\right)^2$$

Jadi kondisi agar dua batu tiba bersama-sama adalah:

$$\boxed{8h(u - gt)^2 = gt^2(2u - gt)^2}$$

**1.23.** *Dua benda sedang bergerak dengan kecepatan $v_1$ dan $v_2$. Ketika mereka saling berhadapan jarak mereka bertambah dekat 4 meter tiap detik. Ketika mereka bergerak searah jarak mereka bertambah dekat 4 meter tiap 10 detik. Hitung $v_1$ dan $v_2$!*

***Jawab:***

$$v_1 + v_2 = 4$$

$$v_1 - v_2 = 0{,}4$$

Dari sini kita peroleh: $\boxed{\mathbf{v_1 = 2{,}2\ m/s}}$ dan $\boxed{\mathbf{v_2 = 1{,}8\ m/s}}$.

**1.24.** *Ketika hari hujan, air hujan turun vertikal dengan kecepatan 30 m/s. Kemudian angin bertiup dengan kecepatan 10 m/s dari timur ke barat. Ke arah mana seseorang harus mengarahkan payungnya agar tidak kehujanan?*

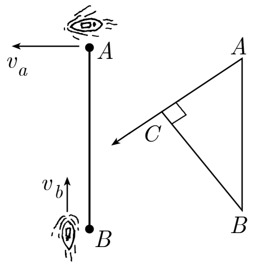
***Jawab:*** **Payung harus diarahkan sesuai dengan arah jatuh air. Silahkan buktikan.**

$$\boxed{\tan \theta = 1/3}$$

$\theta$ = sudut air hujan dengan vertikal.

**1.25.** *Dua kapal laut terpisah pada jarak 20 km pada garis selatan utara. Kapal yang lebih utara bergerak ke Barat dengan kecepatan 30 km/jam. Kapal lain bergerak ke Utara dengan kecepatan 30 km/jam. Berapa jarak terdekat kedua kapal itu? Berapa lama waktu yang diperlukan untuk mencapai jarak terdekat ini?*

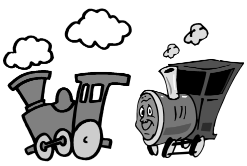
***Jawab:***




Gambar kiri adalah keadaan sebenarnya. Sedangkan gambar kanan kita anggap B diam dan A bergerak relatif terhadap B. Dapat kita buktikan bahwa $\angle CAB = 45^o$ sehingga jarak terdekat adalah jarak $BC$ yaitu $10\sqrt{\mathbf{2}}$ m.

Kecepatan relatif A terhadap B adalah $30\sqrt{2}$ km/jam (silahkan buktikan) sehingga waktu yang diperlukan adalah $t = s/v = 20$ menit (silahkan buktikan!).

1.26. *Sebuah kereta bergerak dengan kecepatan konstan 60 km/jam. Mula-mula ia bergerak ke timur selama 40 menit kemudian pada arah $45^o$ selama 20 menit dan akhirnya ke barat selama 50 menit. Berapa kecepatan rata-rata kereta ini?*



Kecepatan rata-rata $=$ perpindahan/waktu.

Perpindahan arah $x$:

$$s_x = 40 + 10\sqrt{2} - 50 \text{ km}$$

Perpindahan arah $y$:

$$S_y = 10\sqrt{2} \text{ km}$$

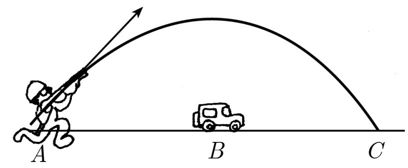
$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

$$t = 40 + 20 + 50 = 110 \text{ menit}$$

Dari sini kita peroleh $\boldsymbol{v} \approx \boxed{\textbf{8 km/jam}}$.

1.27. *Sebuah senapan diarahkan pada sudut 45° terhadap horizontal ke sebuah mobil yang sedang bergerak dengan kecepatan 72 km/jam menjauhinya. Saat itu mobil berjarak 500 m. Hitung jarak mobil dari senapan ketika peluru mengenai mobil itu! Hitung juga kecepatan peluru! g = 9,8 m/s²*.

***Jawab:***




Mula-mula mobil berada di B.

Waktu dari A ke C: $t = \dfrac{\sqrt{2}}{g} v$

Jarak AC $= v^2/g$ (silahkan buktikan!).

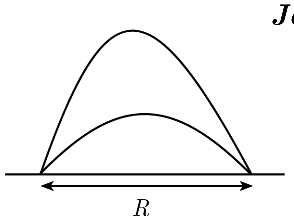
Karena AC = AB + BC, maka:

$$\frac{v^2}{g} = 500 + 20\frac{\sqrt{2}v}{g}$$

Dari sini kita akan peroleh $\boldsymbol{v} = \boxed{\textbf{85,6 m/s}}$ dan **AC** $= \boxed{\textbf{747 m}}$.

**1.28.** *Dua peluru dengan jangkauan R membutuhkan waktu $t_1$ dan $t_2$ untuk mencapai ketinggian semula. Buktikan bahwa $t_1 t_2 = 2R/g$!*

***Jawab:***




$$R = v \cos \theta t \text{ atau } \cos \theta = R/vt$$

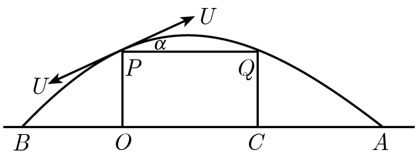
$$t = \frac{(2v \sin\theta)}{g} \text{ atau } \sin \theta = gt/2v$$

Gunakan rumus $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, kita akan peroleh;

$$g^2t^4 - 4v^2t^2 + 4R^2 = 0$$

selesaikan persamaan ini untuk memperoleh $t_1$ dan $t_2$. Setelah itu dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa $\boxed{\boldsymbol{t_1 t_2 = 2R/g}}$.

**1.29.** *Dari suatu titik pada ketinggian h peluru diarahkan dengan kecepatan u dengan sudut elevasi a. Peluru lain B diarahkan dari tempat yang sama dengan kecepatan u tetapi arahnya ke bawah berlawanan dengan A. Buktikan bahwa jarak kedua peluru ketika mengenai tanah adalah:*




$$R = \frac{2u\cos\alpha\sqrt{u^2\sin^2\alpha + 2gh}}{g}$$

***Jawab:***

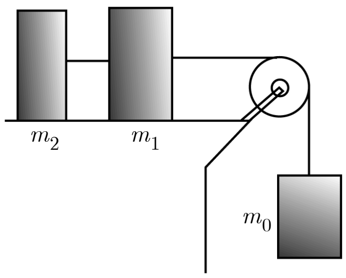
Untuk menyelesaikan soal ini anda bisa gunakan berbagai cara. Gunakan kreativitas anda untuk menyelesaikan soal menarik ini.

Salah satu cara adalah Anda menghitung dulu jarak PQ kemudian jarak CA dan BO.

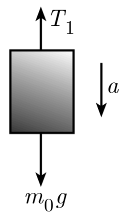
Dari sini kita akan dapatkan hasil yang diminta (silahkan coba, ini tidak sukar kok...!).

**1.30.** *Hitung percepatan yang timbul pada sistem dalam gambar! Anggap katrol licin. Hitung tegangan tali antara benda 1 dan benda 2! Koefisien gesekan antara permukaan benda adalah $\mu$.*

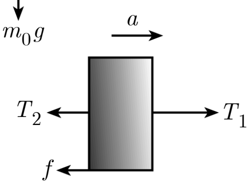
***Jawab:***



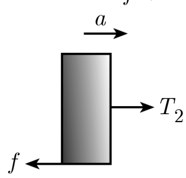

$$m_0 g - T_1 = m_0 a$$




$$T_1 - T_2 - \mu m_1 g = m_1 a$$




$$T_2 - \mu m_2 g = m_2 a$$

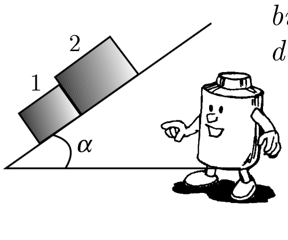



Ketiga persamaan di atas dapat diselesaikan untuk mendapatkan:

$$a = \frac{m_0 g - \mu(m_1 + m_2)g}{m_0 + m_1 + m_2}$$

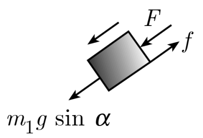
$$T_2 = \frac{(1+\mu)m_0 m_2 g}{m_0 + m_1 + m_2}$$

**1.31.** *Dua balok 1 dan 2 diletakkan pada bidang miring dengan sudut miring $\alpha$. Massa balok masing-masing $m_1$ dan $m_2$. Koefisien gesekan antara bidang miring dan balok masing-masing $\mu_1$ dan $\mu_2$. Hitung gaya kontak dan sudut minimum bidang miring dimana balok mulai bergerak!*

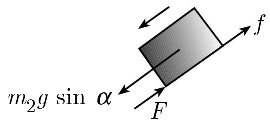


***Jawab:***

a) Koefisien gesek balok 1 harus lebih besar atau sama dengan balok 2 (mengapa?).




$$m_1 g \sin \alpha + F - \mu_1 m_1 g \cos \alpha = m_1 a$$

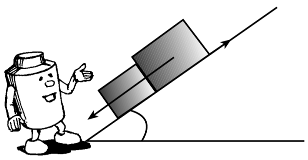



$$m_2 g \sin \alpha - F - \mu_2 m_2 g \cos \alpha = m_2 a$$

Dari kedua persamaan diatas kita peroleh:

$$\boxed{F = \frac{(\mu_1 - \mu_2)\, m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \cos\alpha}$$

b) Sudut minimum bidang miring adalah sudut terkecil dimana sistem akan bergerak. Dari gambar berikut, kita peroleh:

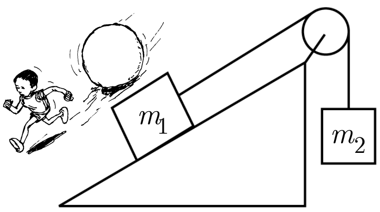


$$m_1 \mathrm{g} \sin \alpha + m_2 g \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha - \mu_2 m_2 g \cos \alpha = (m_1 + m_2) \bullet a = 0$$

Dari persamaan diatas kita peroleh:

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}}$$

***1.32.*** *Pada sistem di bawah ini tentukan perbandingan $m_2/m_1$ ketika:*
*a) benda $m_2$ mulai bergerak ke bawah*
*b) benda $m_2$ mulai bergerak ke atas*
*c) benda $m_2$ diam*
*Abaikan massa katrol dan tali. Koefisien gesekan antara dua permukaan m dan sudut bidang miring $\alpha$.*




***Jawab:***

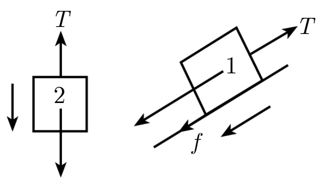
a) Pada saat benda $m_2$ bergerak ke bawah, maka gesekan pada $m_1$ kebawah (arah gaya gesek selalu berlawanan arah gerak).

$$T - \mu m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha > 0$$

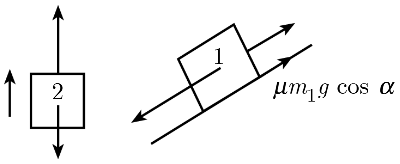
$$m_2 g - \mathrm{T} > 0$$

Selesaikan kedua persamaan di atas kita peroleh:

$$\boxed{\frac{m_2}{m_1} > \mu \cos \alpha + \sin \alpha}$$



b) Pada kasus ini gaya gesek pada $m_1$ mengarah ke atas.




$$-T - \mu m_1 g \cos\alpha + m_1 g \sin\alpha > 0$$

$$T - m_2 g > 0$$

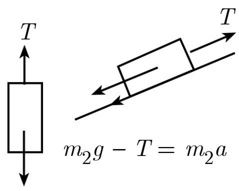
Selesaikan kedua persamaan di atas kita peroleh:

$$\boxed{\frac{m_2}{m_1} < -\mu \cos\alpha + \sin\alpha}$$

c) Untuk kasus ini kita gabungkan kasus 1 dan kasus 2, hasilnya adalah:

$$\boxed{\sin\alpha - \mu\cos\alpha \le \frac{m_1}{m_2} \le \sin\alpha + \mu\cos\alpha}$$

***1.33.*** *Pada soal sebelumnya anggap $m_1 = 1{,}5\ m_2$. Hitung percepatan sistem! Koefisien gesekan 0,1 dan $\alpha = 30^o$.*




***Jawab:*** Dengan data-data yang diberikan, kita harus cek dulu apakah benda $m_2$ bergerak ke bawah atau ke atas.

Silahkan Anda buktikan bahwa $m_2$ bergerak ke bawah (kasus a pada soal sebelumnya).

$$T - \mu m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha = m_1 a$$

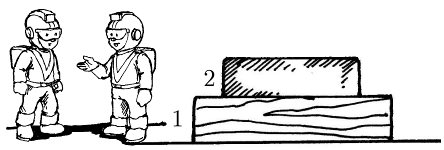
$$m_2 g - T = m_2 a$$

Selesaikan kedua persamaan diatas, kita akan peroleh:

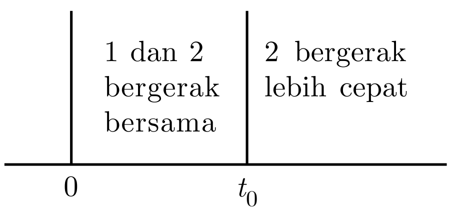
$$\boxed{a = \frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha - \mu m_1 \cos\alpha)\, g}{m_1 + m_2}}$$

Dengan memasukkan nilai-nilai yang diberikan, kita peroleh bahwa $\boxed{a \approx 0{,}05g.}$

***1.34.*** *Benda 1 bermassa $m_1$ diletakkan diatas benda 2 yang bermassa $m_2$. Benda 2 ditarik oleh gaya $F = bt$ (gaya ini semakin lama semakin besar dengan berjalannya waktu t). Hitung percepatan masing-masing benda sebagai fungsi waktu jika koefisien gesekan antara kedua benda adalah $\mu$! Gambarkan hasil yang diperoleh ini! Lantai licin.*




***Jawab:*** Mula-mula (ketika $t$ kecil), gaya $F$ kecil sehingga kedua benda akan bergerak bersamaan. Ketika $t > t_0$ gaya $F$ sudah sangat besar sehingga percepatan benda 2 akan lebih besar dari benda 1.



- $t < t_0$ $(a_1 = a_2 = a)$

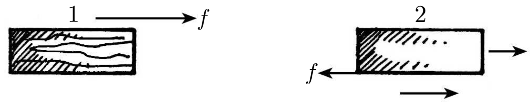
$$F = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{bt}{m_1 + m_2}$$

- $t > t_a$ $(a_1 \neq a_2)$

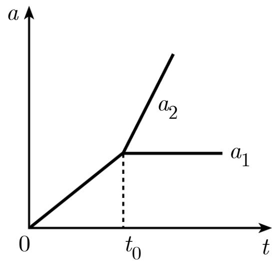
$$bt - \mu m_2 g = m_2 a_2$$

$$\mu m_2 g = m_1 a_1$$

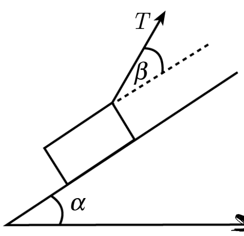



$$a_1 = \frac{\mu m_2 g}{m_1} \qquad a_2 = \frac{bt - \mu m_2 g}{m_2}$$

Grafik percepatan sebagai fungsi waktu:




**1.35.** *Suatu benda bermassa m terletak di bidang miring dengan sudut miring $\alpha$. Benda ini ditarik oleh benang dengan tegangan $T$ yang membentuk sudut $\beta$ dengan permukaan bidang miring. Hitung $\beta$ agar tegangan $T$ minimum!*




***Jawab:*** Tegangan $T$ minimum ketika benda diam. Persamaan gerak:

Arah tegak lurus bidang miring:

$$N = mg \cos \alpha - T \sin \beta$$

Arah sejajar bidang miring:

$$mg \sin \alpha = T \cos \beta - \mu N$$

atau

$$T = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta}$$

Anggap $\mu$ = tan $\theta$. Sehingga persamaan di atas boleh ditulis:

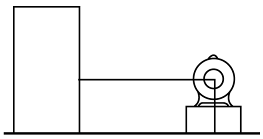
$$T = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\cos\theta}{\cos(\beta - \theta)}$$

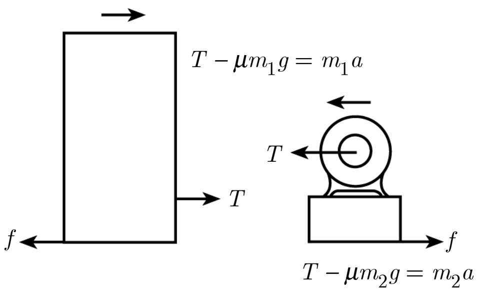
$T$ akan minimum jika cos $(\beta - \theta) = 1$ atau $\beta = \theta$. Sesuai dengan anggapan kita $\mu = \tan\theta = \tan\beta$.

Masukkan nilai tangen ini pada persamaan $T$, kita akan peroleh;

$$T = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

**1.36.** *Suatu balok dan motor listrik terletak pada bidang datar kasar (koefisien gesekan $\mu$). Seutas tali diikat pada balok dan dililitkan pada poros motor listrik. Mula-mula jarak antara balok dan motor listrik adalah L. Ketika motor dihidupkan, balok mulai bergerak dengan percepatan konstan a. Kapan kedua benda akan bertabrakan ($m_{balok} = 2m_{motor}$)?*






***Jawab:* $a_1 = a$**

Percepatan relatif kedua balok adalah:

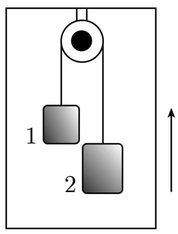
$$a_r = a_1 + a_2$$

Boleh dibayangkan bahwa kedua benda saling mendekat dengan percepatan $a_r$. Waktu yang diperlukan untuk kedua benda bertemu dihitung dengan rumus: $S = \frac{1}{2} a_r t^2$.

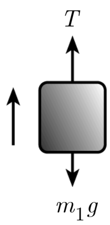
Karena $m_1 = 2m_2$ maka:

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a_r}} = \sqrt{\frac{2L}{\mu g + 3a}}$$

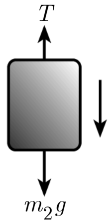
**1.37.** *Sebuah katrol tergantung pada langit-langit suatu lift. Pada katrol itu terdapat beban $m_1$ dan $m_2$. Jika lift bergerak naik dengan percepatan $a_o$ dan abaikan massa katrol dan tali, hitung percepatan $m_1$ relatif terhadap tanah dan relatif terhadap lantai lift!*




***Jawab:***




$$T - m_1 g = m_1 a_1$$




$$m_2 g - T = m_2 a_2$$

Perhatikan bahwa $a_1$ dan $a_2$ diukur dalam kerangka inersial (dalam hal ini adalah tanah).

Jika percepatan benda 1 dan 2 relatif terhadap katrol adalah $a$ dan percepatan lift adalah $a_0$ maka,

$$a_1 = a + a_0$$

$$a_2 = a - a_0$$

Dari kedua persamaan ini kita peroleh:

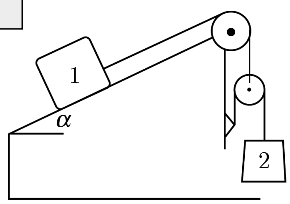
$$a = \frac{(m_2 - m_1)(g + a_0)}{m_1 + m_2}$$

Percepatan $m_1$ relatif terhadap tanah diperoleh dengan mensubstitusikan $a$ pada persamaan berikut:

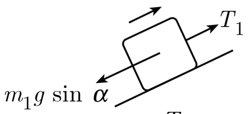
$$a_1 = a + a_0$$

$$\boxed{a_1 = \frac{(m_2 - m_1)g + 2m_1 a_0}{m_1 + m_2}}$$

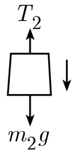
***1.38.*** *Tentukan percepatan benda 2 pada susunan berikut! Anggap massa benda 2 adalah $\eta$ kali massa benda 1 dan sudut bidang miring sama dengan $\alpha$. Abaikan massa katrol dan tali, serta gesekan.*




***Jawab:***




$$T_1 - m_1 g \sin \alpha = m_1 a_1$$




$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

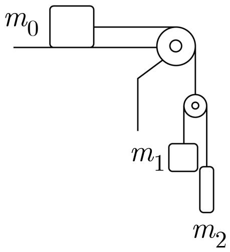
Karena katrol tidak bermassa maka, $T_1 = 2T_2$.

Ketika benda 1 bergerak $L$ benda 2 telah bergerak $2L$, jadi: $a_2 = 2a_1$.

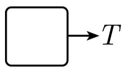
Dengan menggunakan $m_2/m_1 = \eta$ dan selesaikan persamaan diatas kita akan peroleh:

$$\boxed{a_2 = \frac{2(2\eta - \sin \alpha)g}{4\eta + 1}}$$

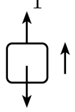
**1.39.** *Pada sistem dibawah ini hitung percepatan benda $m_1$. Anggap benda $m_2$ bergerak ke bawah.*



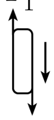

***Jawab:***




$T = m_0 a_0$




$T_1 - m_1 g = m_1 a_1$




$m_2 g - T_1 = m_2 a_2$

Karena massa katrol diabaikan maka $2T_1 - T = m_k a_k = 0$ atau $T = 2T_1$.

Kasus pada soal ini mirip dengan kasus soal sebelumnya, hanya disini $a_0$-nya arah ke bawah.

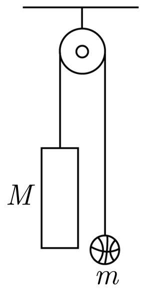
$$a_1 = a - a_0$$

$$a_2 = a + a_0$$

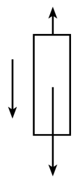
Dengan menyelesaikan persamaan-persamaan di atas kita akan peroleh:

$$\boxed{a_1 = \frac{(m_2 - m_1)\, m_0 - 4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)\, m_0 + 4m_1 m_2}\, g}$$

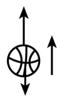
**1.40.** *Pada sistem dibawah ini massa batang M lebih besar dari massa bola m. Abaikan massa dan gesekan katrol. Pada keadaan awal bola terletak sejajar ujung batang bawah. Tentukan tegangan tali bila setelah t detik bola sejajar dengan ujung batang atas! Panjang batang L.*




***Jawab:***



$Mg - T = Ma_1$




$T - mg = ma_2$

$M$ bergerak ke bawah dengan percepatan $a_1$ sedangkan $m$ bergerak ke atas dengan percepatan $a_2$, sehingga percepatan relatif m terhadap $M$ adalah:

$$a_{rel} = a_1 + a_2 = a + a = 2a$$

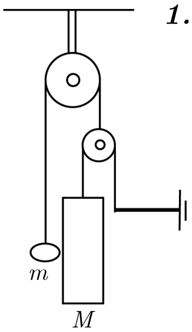
Panjang batang L. Panjang ini ditempuh oleh benda $m$ dengan percepatan relatif $a_{rel}$ dalam waktu $t$, sehingga;

$$L = \tfrac{1}{2}\, a_{rel} t^2$$

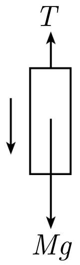
Selesaikan persamaan-persamaan di atas, kita akan peroleh;

$$\boxed{T = \frac{2LMm}{t^2\,(M - m)}}$$

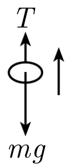
**1.41.** *Dalam sistem berikut ini massa bola adalah $\eta$ = 1,8 kali massa batang. Panjang batang L = 100 cm. Abaikan massa katrol dan massa tali, serta gesekan. Bola mula-mula ditempatkan sejajar ujung bawah batang, kemudian dilepaskan. Kapan bola akan sejajar dengan tinggi ujung atas batang?*




***Jawab:***




$$Mg - T_1 = Ma_1$$




$$T - mg = ma_2$$

Karena katrol tidak bermassa maka:

$$T = 2T_1$$

Seperti soal sebelumnya ($a_1 = 2\ a_2$), kita akan gunakan percepatan relatif untuk menghitung $t$.

$$a_{rel} = a_1 + a_2 \text{ dan } L = \tfrac{1}{2}\, a_{rel} t^2$$

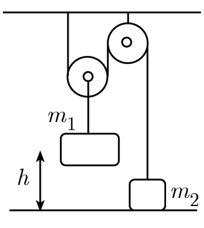
Dari persamaan-persamaan di atas kita akan peroleh,

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a_{rel}}}$$

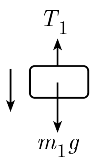
$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2L(4+\eta)}{3(2-\eta)\,g}}}$$

atau dengan memasukkan nilai besaran yang diketahui, kita peroleh: $\boxed{t = 1{,}4 \text{ detik.}}$

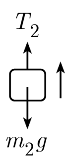
**1.42.** *Pada sistem dibawah ini massa benda 1 adalah $\eta$ = 4,0 massa benda 2. Tinggi h = 20 cm. Abaikan massa katrol, massa tali dan gesekan. Pada saat tertentu benda 2 dilepaskan, berapakah tinggi maksimum yang dicapai benda 2?*




***Jawab:***




$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$




$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2$$

Perhatikan bahwa ketika benda 1 turun sejauh $s$, benda 2 akan naik sejauh $2s$ sehingga percepatan benda 2 ***dua kali*** percepatan benda 1.

$$a_2 = 2a_1$$

Karena katrol yang bergerak tidak bermassa maka;

$$T_1 = 2T_2$$

Selesaikan persamaan-persamaan di atas, kita akan peroleh,

$$a_1 = \frac{(m_1 - 2m_2)}{m_1 + m_2} g$$

atau

$$a_1 = \left(\frac{\eta - 2}{\eta + 4}\right) g$$

Waktu yang diperlukan benda 1 mencapai tanah dicari dengan rumus:

$$h = \tfrac{1}{2} a_1 t_1^2$$

atau

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a_1}}$$

**Dalam waktu** $t_1$ ini benda 2 akan mencapai ketinggian $h_2$ dan kecepatan $v_2$.

$$h_2 = \tfrac{1}{2} a_2 t_1^2 = 2h$$

$$v_2 = a_2 t_1$$

Setelah benda 1 mencapai lantai, gerakan benda 2 adalah seperti gerakan benda yang dilemparkan ke atas dengan kecepatan awal $v_2$ dari ketinggian $h_2$.

Benda 2 akan mencapai tinggi maksimum setelah waktu $t'$.

$$v = v_0 - gt$$

$$0 = v_2 - gt'$$

$$t' = v_2/g$$

Ketinggian maksimum benda 2 dicari dengan rumus:

$$h_{maks} = h_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} gt^2$$

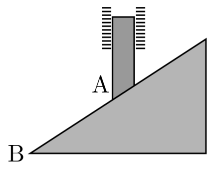
$$= h_2 + v_2 t' - \tfrac{1}{2} gt'^2$$

$$h_{maks} = \frac{2h\eta + 8h + 4h\eta - 8h}{\eta + 4}$$

$$\boxed{= \frac{6h\eta}{\eta + 4}}$$

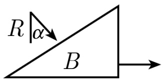
atau $\boldsymbol{h_{maks}} = \boxed{\mathbf{0{,}6\ m}}$.

**1.43.** *Pada gambar dibawah ini batang A bergerak turun vertikal sehingga bidang miring B akan terdorong horizontal (bidang miring dan lantai licin). Tentukan percepatan batang A dan bidang miring B jika perbandingan massa bidang miring terhadap batang adalah* $\eta$*!*

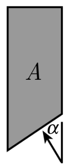



***Jawab:*** Anggap batang A bergerak turun dengan percepatan $a_A$ dan bidang miring akan bergerak ke kanan dengan percepatan $a_B$.

Anggap batang menekan bidang miring dengan gaya $R$ dan bidang miring bereaksi dengan memberi gaya pada batang sebesar $R$ juga.




$$R \sin \alpha = m_B a_B$$




$$m_A g - R \cos \alpha = m_A a_A$$

Hubungan perpindahan A dan B adalah:

$$\tan \alpha = {}^{S_A}\!/_{S_B}$$

sehingga:

$$\tan \alpha = {}^{a_A}\!/_{a_B}$$

Selesaikan persamaan di atas, kita akan peroleh:

$$a_A = \frac{m_A g}{m_B \cot^2 \alpha + m_A}$$

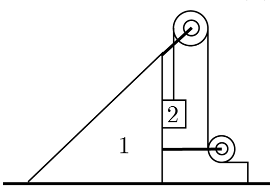
atau,

$$a_A = \frac{g}{\eta \cot^2 \alpha + 1}$$

dan

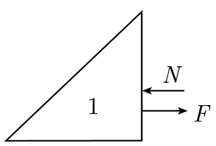
$$a_B = \frac{g}{\eta \cot \alpha + \tan \alpha}$$

**1.44.** *Pada susunan sistem di bawah ini massa bidang miring* $m_1$ *dan massa benda* $m_2$*. Gesekan hanya ada antara dinding kanan bidang miring dan benda* $m_2$ *dengan koefisien gesekan* $\mu$*. Abaikan massa katrol dan tali. Tentukan percepatan* $m_2$ *relatif terhadap tanah!*



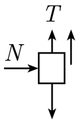

***Jawab:*** Ketika benda 2 bergerak ke bawah, benda 1 akan tertarik ke kanan. Percepatan benda 1 memberi tekanan $N$ pada benda 2.

Sebagai reaksinya benda 2 akan menekan benda 1 sebesar $N$ pula.




$$F - N = m_1 a_1$$

Benda 2 mempunyai gerakan arah sumbu $y$ dan $x$.




$$m_2 g - T - \mu N = m_2 a_{2y}$$
$$N = m_2 a_{2x}$$

Sekarang bayangkanlah bahwa ketika $m_2$ turun sejauh $L$, bidang miring $m_1$ akan bergerak ke kanan sejauh $L$ juga. Gerakan bidang miring ini akan memindahkan benda $m_2$ kearah mendatar sejauh $L$ juga, sehingga;

$$a_1 = a_{2x} = a_{2y} = a$$

Gunakan $F = T$ (mengapa bukan $2T$?), selesaikan persamaan - persamaan diatas kita akan peroleh:

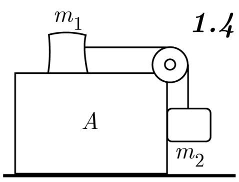
$$a = \frac{m_2 g}{2m_2 + \mu m_2 + m_1}$$

**Percepatan benda $\boldsymbol{m_2}$** terhadap tanah adalah;

$$a_{tot} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

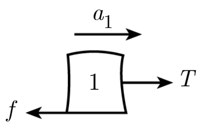
atau

$$\boxed{a_{tot} = \frac{\sqrt{2}g}{2 + \mu + {}^{m_1}\!/_{m_2}}}$$




***1.45.*** *Berapakah percepatan minimum yang harus diberikan pada balok A agar benda 1 dan benda 2 diam relatif terhadap A? Koefisien gesekan antara balok dan benda-benda $\mu$. Abaikan massa katrol dan tali. Anggap juga katrol licin.*

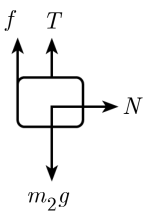
***Jawab:*** Jika A bergerak cepat sekali maka benda 1 akan terdorong ke kiri (benda 2 ke atas). Tetapi jika A bergerak lambat benda 1 akan bergerak ke kanan (karena massa benda 2 lebih besar). Dari sini kita memperoleh ide bahwa ada suatu keadaan dimana benda 1 dan 2 akan diam.




$$T - \mu m_1 g = m_1 a_1$$

Catatan: $a_1$ adalah relatif terhadap tanah (ingat hukum Newton hanya berlaku pada sistem inersial, dalam hal ini tanah adalah sistem inersial).

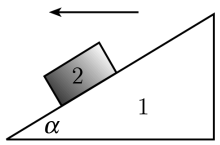
Benda 2 bergerak kearah mendatar (relatif terhadap tanah). Percepatan arah $y$-nya nol.




$$N = m_2 a_{2x}$$
$$m_2 g - T - \mu N = m_2 a_{2y}$$
$$= 0$$

Karena $a_1 = a_{2x} = a$ maka persamaan-persamaan di atas dapat diselesaikan untuk memperoleh:

$$\boxed{a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + \mu m_2}\, g}$$

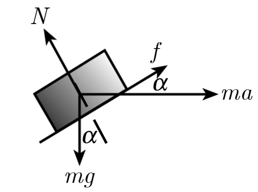



**1.46.** *Prisma 1 dengan balok 2 di atasnya disusun seperti pada gambar. Sistem bergerak ke kiri dengan percepatan a. Hitung berapa nilai percepatan maksimum agar balok diam relatif terhadap prisma! Koefisien gesekan antara kedua benda ini adalah* $\mu < \cot \alpha$.

***Jawab:*** Bayangkan jika $a$ terlalu besar maka balok akan bergerak ke atas, sebaliknya jika terlalu kecil balok akan bergerak ke bawah. Dari sini kita dapat ide bahwa ada nilai $a$ tertentu dimana balok tetap diam relatif terhadap prisma.

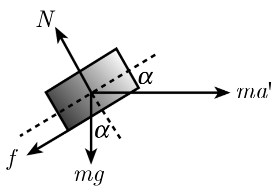
Gaya yang bekerja pada prisma adalah gaya tekan dari balok. Sedangkan gaya pada balok disamping gaya berat, juga ada gaya tekan dari prisma dan gaya gesek. Arah gaya gesek tergantung pada kecenderungan benda ini bergerak.

*"Benda yang berada dalam sistem yang dipercepat dengan percepatan a akan mengalami gaya fiktif sebesar F = ma". Arah gaya ini* ***berlawanan*** *dengan arah percepatan.* Sistem dipercepat ke kiri dengan percepatan $a$, akibatnya balok mengalami gaya fiktif $F = m_2 a$ yang arahnya ke kanan. Kasus 1 (balok hampir bergerak ke bawah).




$$\begin{aligned} N &= ma \sin \alpha + mg \cos \alpha \\ ma \cos \alpha + \mu N &= mg \sin \alpha \\ a &= \frac{g\,(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \end{aligned}$$

Kasus 2 (balok hampir bergerak ke atas).

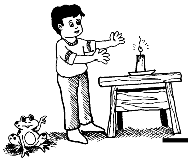


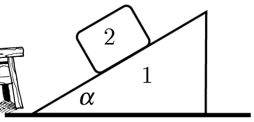

$$\begin{aligned} N &= ma' \sin \alpha + mg \cos \alpha \\ ma' \cos \alpha &= \mu N + mg \sin \alpha \\ a &= \frac{g\,(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \end{aligned}$$

Karena yang ditanyakan adalah percepatan maksimum, maka kita ambil kasus 2 ($a' > a$).

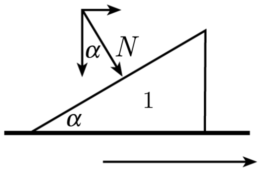
$$\boxed{a_{maks} = \frac{g\,(1 + \mu \cot \alpha)}{\cot \alpha - \mu}}$$

**1.47.** *Sebuah balok 2 bermassa $m_2$ ditempatkan diatas prisma 1 yang bermassa $m_1$. Sudut miring prisma* $\alpha$. *Abaikan gesekan, hitung percepatan prisma!*

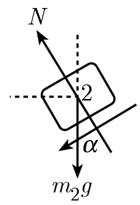





***Jawab:*** Ketika balok 2 bergerak turun, prisma 1 akan bergerak ke kanan.



$$N \sin \alpha = m_1 a_1$$



$$m_2 g - N \cos \alpha = m_2 a_{2y}$$
$$N \sin \alpha = m_2 a_{2x}$$

Catatan: Semua percepatan diatas diukur menurut pengamat yang berdiri di tanah.

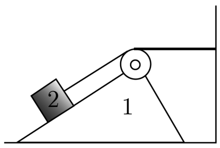
Misalkan percepatan benda 2 relatif terhadap bidang miring adalah $a$. Hubungan antara $a_{2x}$ dan $a_{2y}$ dengan $a$ dan $a_1$ adalah (Anda boleh juga gunakan konsep gaya fiktif seperti pada soal sebelumnya):

$$a_{2x} = a \cos \alpha - a_1$$
$$a_{2y} = a \sin \alpha$$

Dari persamaan-persamaan di atas kita akan peroleh:

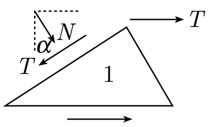
$$\boxed{a_1 = \frac{g \sin\alpha \cos\alpha}{m_1/m_2 + \sin^2 \alpha}}$$

***1.48.*** *Dalam sistem dibawah ini hitung percepatan segitiga jika gesekan, massa tali dan massa katrol diabaikan!*



***Jawab:*** Pada kasus ini balok 2 turun mengakibatkan segitiga 1 bergerak ke kanan.

$$T \cos \alpha - N \sin \alpha = -m a_{2x}$$
$$T \sin \alpha + N \cos \alpha - mg = -m a_{2y}$$



$$N \sin \alpha + T - T \cos \alpha = m_1 a_1$$

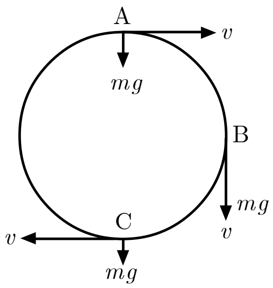
Seperti soal sebelumnya, jika percepatan benda 2 relatif terhadap benda 1 adalah $a$ maka,

$$a_{2x} = a \cos \alpha - a_1$$
$$a_{2y} = a \sin \alpha$$

Dengan mengambil $a = a_1$ (mengapa?) kita peroleh:

$$\boxed{a_1 = \frac{m_2 g \sin\alpha}{2m_2 (1 - \cos\alpha) + m_1}}$$

***1.49.*** *Sebuah pesawat terbang bergerak dalam suatu lintasan melingkar vertikal berjari-jari R = 500 m dengan kecepatan konstan v = 360 km/jam. Tentukan berat semu penerbang (m = 70 kg) dititik terendah (C), titik tertinggi (A) dan titik tengah (B) dari lintasan!*




***Jawab:***

Di titik A penerbang mengalami gaya sentrifugal F ke atas, akibatnya berat semunya akan berkurang:

$$\boxed{W_A = mg - F}$$

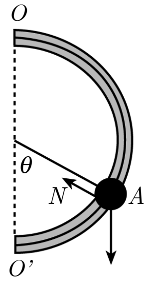
Catatan: $F = mv^2/R$

Di titik B gaya berat orang ini merupakan resultan dari $mg$ dan $F$.

$$\boxed{W_B = \sqrt{F^2 + (mg)^2}}$$

Sedangkan di titik C gaya berat ini ditambah dengan gaya sentrifugal.

$$\boxed{W_C = mg + F}$$




**1.50.** *Bandul A dapat meluncur bebas sepanjang suatu lintasan berbentuk setengah lingkaran berjari-jari R (lihat gambar). Sistem berputar dengan kecepatan sudut $\omega$ terhadap sumbu vertikal OO'. Hitung sudut $\theta$ dimana bandul berada pada keseimbangan!*

***Jawab:*** Bandul A mengalami gaya normal. Jika kita meninjau dari sisi bandul A maka kita harus perhitungkan gaya fiktif (gaya sentrifugal).

Gaya-gaya pada arah mendatar:

$$N \sin \theta = mr\omega^2 = m(R \sin \theta)\omega^2$$

Gaya-gaya vertikal:

$$N \cos \theta = mg$$

Dari dua persamaan di atas kita peroleh:

$$\boxed{\cos \theta = \frac{g}{R\omega^2}}$$

Ini adalah syarat keseimbangan. Kemungkinan lain adalah benda akan seimbang jika $\theta = 0$.

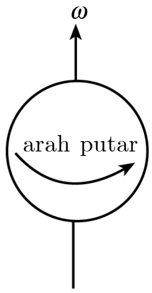
**1.51.** *Sebuah senapan diarahkan ke suatu sasaran yang terletak di sebelah utara. Tentukan berapa jauh menyimpangnya peluru dari garis yang menghubungkan sasaran dan senapan! Peluru ditembakkan mendatar pada garis lintang $\phi = 60^o$, kecepatan peluru $v = 900$ m/s, dan jarak dari target ke senapan adalah $s = 1{,}0$ km.*

***Jawab:*** Akibat rotasi bumi, suatu benda yang bergerak dengan kecepatan $\boldsymbol{v}$ di permukaan bumi akan merasakan gaya koriolis $\boldsymbol{F}_k$ sebesar:

$$\boldsymbol{F}_k = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$

dengan $\boldsymbol{\omega}$ adalah kecepatan sudut rotasi bumi. Arah $\boldsymbol{\omega}$ didefinisikan seperti pada gambar.

Gaya koriolis ini sebenarnya adalah gaya fiktif. Gaya ini akan dirasakan oleh benda-benda yang bergerak dalam suatu *sistem* dipercepat (bumi




merupakan contoh sistem yang dipercepat, percepatannya adalah percepatan sentripetal).

Besar percepatan koriolis:

$$a_k = F_k/_m = 2\omega v \sin\phi$$

$\phi$ adalah sudut antara $\boldsymbol{\omega}$ dan $v$ dalam hal ini sama dengan sudut lintang. Arah percepatan koriolis keluar bidang kertas (perhatikan arah perkalian vektor ini). Jadi simpangan akibat $\boldsymbol{a_k}$ adalah:

$$h = \tfrac{1}{2}\, a_k t^2 = \tfrac{1}{2}\,(2\omega v \sin\phi)t^2$$

Karena $t = s/_v$ , maka:

$$\boxed{h = \frac{\omega s^2 \sin\phi}{v}}$$

**1.52.** *Sebuah disk yang diletakkan mendatar berputar dengan kecepatan sudut konstan $\boldsymbol{\omega}$ = 6,0 rad/s terhadap sumbu vertikal yang melalui pusat disk. Sebuah benda kecil bermassa m = 0,5 kg bergerak sepanjang diameter disk dengan kecepatan v' = 50 cm/s yang selalu konstan relatif terhadap disk. Tentukan gaya yang dirasakan benda ketika benda berada pada jarak r = 30 cm dari sumbu putaran!*

***Jawab:*** Pada sistem ini benda akan merasakan 3 gaya:

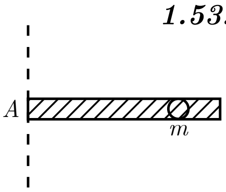
- gaya sentrifugal: $F_c = m\omega^2 r$
- gaya gravitasi: $F_g = mg$
- gaya *koriolis*: $F_k = 2m\omega v'$

Gaya-gaya ini tegak lurus satu terhadap lainnya. Jadi resultan gaya yang dikenakan pada benda oleh disk adalah:

$$F = \sqrt{F_g^2 + F_c^2 + F_k^2}$$

$$F = m\sqrt{g^2 + \omega^4 r^2 + (2v'\omega)^2}$$

Dengan memasukkan angka-angkanya kita peroleh, $\boxed{F = 8\ N.}$




**1.53.** *Sebuah batang licin **AB** yang diletakkan mendatar berputar dengan kecepatan sudut $\boldsymbol{\omega}$ = 2,0 rad/s terhadap suatu sumbu vertikal yang melalui ujung batang A. Sebuah beban bermassa m = 0,50 kg meluncur bebas sepanjang batang dari titik A dengan kecepatan awal $v_0$ = 1,00 m/s. Tentukan gaya koriolis yang bekerja pada beban ini ketika beban terletak pada jarak r = 50 cm dari sumbu putar!*

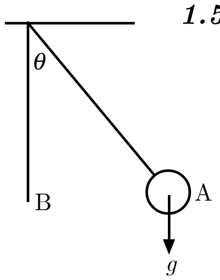
***Jawab:*** Ketika benda berada pada jarak $r$ dari titik A, kecepatan linearnya adalah: (gunakan hukum kekekalan energi dimana usaha oleh gaya sentrifugal adalah $\dfrac{m\omega^2 r^2}{2}$)

$$v = \sqrt{(r\omega)^2 + v_0^2}$$

Jadi, gaya *coriolis* yang dialami benda adalah:

$$F_k = m|2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}| = 2m\omega v$$
$$= 2m\omega\sqrt{(r\omega)^2 + v_0^2}$$

Dengan memasukan data yang diketahui, kita peroleh: $\boxed{\boldsymbol{F_k = 2{,}8\ N}}$.




***1.54.*** *Sebuah bola digantung pada seutas tali dan berayun dalam bidang vertikal sedemikian sehingga nilai percepatan efektifnya pada titik tertinggi dan titik terendah adalah sama. Tentukan sudut simpangan ini!*

***Jawab:*** Di titik tertinggi kecepatan bola sama dengan nol, sehingga percepatan sentrifugalnya nol (yang ada hanya percepatan tangensial sebesar $a_A = g \sin \theta$).

Di titik terendah percepatan tangensial sama dengan nol. Tetapi percepatan sentrifugalnya ada yaitu sebesar: $a_B = v^2/L$ .

Untuk mencari $v$ kita bayangkan benda berada pada posisi A mempunyai energi potensial sebesar $mg(L - L \cos \theta)$ acuan diambil pada titik B. Kemudian benda bergerak dan energi potensial benda diubah menjadi energi kinetik. Sampai di titik B seluruh energi potensial telah menjadi energi kinetik.

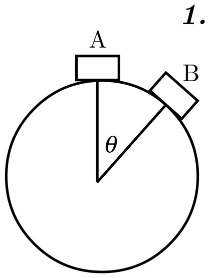
$$mg(L - L \cos \theta) = \tfrac{1}{2} mv^2$$

Dari persamaan ini kita peroleh $v$.

Karena $a_A = a_B$ maka kita peroleh,

$$\sin \theta = 2(1 - \cos \theta)$$

atau $\boldsymbol{\theta = 2 \cot^{-1}(2)} = \boxed{\mathbf{53°}}$.




***1.55.*** *Sebuah benda kecil A mulai meluncur dari puncak suatu lingkaran yang jari-jarinya R. Tentukan sudut **θ** dimana benda meninggalkan lingkaran. Hitung kecepatan jatuh benda itu!*

***Jawab:*** Di titik A, gaya tekan lingkaran pada benda $N = mg$.

Sedangkan di titik B, gaya tekannya sama dengan nol (benda meninggalkan lingkaran).

$$mg \cos \theta = F$$

$F = mv^2/R$ adalah gaya sentrifugal.

Untuk mencari $v$ kita gunakan hukum kekekalan energi seperti soal sebelumnya.

Kita ambil acuan di pusat lingkaran. Energi di titik A adalah:

$$E_A = mgR$$

sedangkan energi di titik B adalah:

$$E_B = mgR \cos \theta + \tfrac{1}{2} mv^2$$

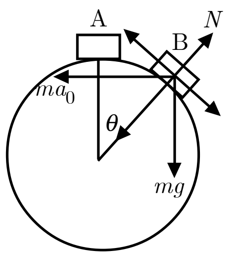
Karena energi kekal maka $E_A = E_B$.

Dari sini kita peroleh $\boxed{\cos \boldsymbol{\theta} = 2/3}$.

**1.56.** *Sebuah benda kecil diletakkan pada puncak suatu lingkaran licin berjari-jari R. Kemudian lingkaran bergerak mendatar dengan percepatan konstan $a_o$ dan benda mulai menggelincir ke bawah. Tentukan:*
*(a) kecepatan benda relatif terhadap lingkaran pada saat jatuh;*
*(b) sudut $\theta_0$ antara garis vertikal dan vektor radius yang digambar dari pusat lingkaran ke titik jatuh; $\theta_0$ untuk $a_0 = g$!*

***Jawab:***

(a) Pada waktu lingkaran diberi percepatan $a_0$, benda akan mengalami gaya fiktif sebesar $m \bullet a_0$ berlawanan dengan arah $a_0$ (gaya fiktif dapat anda rasakan ketika mobil yang Anda naiki di percepat). Pada gambar terlihat bahwa,




$$mg \cos \theta + ma_0 \sin \theta - N = mv^2/R$$

dan

$$mg \sin \theta - ma_0 \cos \theta = ma_t$$

Ketika benda jatuh $N = 0$ dan $\theta = \theta_0$, sehingga kita peroleh:

$$mg \cos \theta_0 + ma_0 \sin \theta_0 = mv^2/R$$

Energi potensial benda di A diubah menjadi energi kinetik di B (perhatikan baik-baik bahwa usaha gaya fiktif juga harus diperhitungkan disini) sehingga kita peroleh,

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = mg\,(R - R \cos \theta_0) - ma_0\, R \sin \theta_0$$

Dari kedua persamaan diatas kita peroleh,

$$v = \sqrt{\frac{2gR}{3}}$$

(b) Dengan memasukkan nilai $v$ ke persamaan energi di atas kita akan peroleh,

$$g \cos \theta_0 + g \sin \theta_0 = \frac{2gR}{3R}$$

atau,

$$(3 \cos \theta_0 - 2)^2 = 9 \sin^2 \theta_0$$

atau,

$$18 \cos^2 \theta_0 - 12 \cos \theta_0 + 4 - 9 = 0$$

Sehingga kita peroleh,

$$\cos \theta_0 = \frac{2 + \sqrt{14}}{6}$$

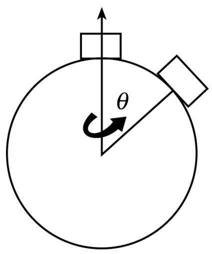
atau, $\boldsymbol{\theta_0} = \boxed{\mathbf{17^o}.}$

**1.57.** *Sebuah benda kecil bermassa m = 0,30 kg meluncur ke bawah dari puncak suatu lingkaran berjari-jari R = 1,0 m. Lingkaran berputar dengan kecepatan sudut konstan $\omega$ = 6,0 rad/s terhadap sumbu vertikal yang melalui pusat lingkaran. Tentukan gaya sentrifugal dan gaya koriolis ketika benda meninggalkan lingkaran!*

***Jawab:*** Anggap benda meninggalkan lingkaran pada sudut $\theta$. Dapat dihitung dengan mudah bahwa (lihat soal 1.55).

$$\theta = \cos^{-1}\left(\tfrac{2}{3}\right)$$

$\theta = \cos^{-1}$ (2/3)




Karena lingkaran berputar dengan kecepatan sudut $\omega$, maka benda akan merasakan gaya sentrifugal selama bergerak di bidang lingkaran ini. Besar gaya sentrifugal adalah:

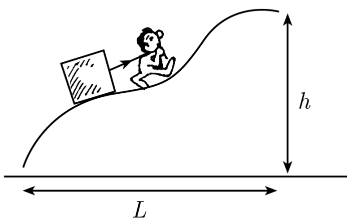
$$\begin{aligned} F_c &= mr\omega^2 = mR\sin\theta\,\omega^2 \\ &= mR\omega^2\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= 8N \end{aligned}$$


Gaya *koriolis*: -2m$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_k &= 2m\omega\sqrt{\omega^2R^2\sin^2\theta + 2gR(1-\cos\theta)\cos^2\theta} \\ &= \tfrac{2}{3}\,mR\omega^2\sqrt{5+\frac{8g}{3\omega^2R}} \\ &= \boxed{17N} \end{aligned}$$

Catatan: nilai $v$ diatas diperoleh dari resultan kecepatan akibat rotasi $v_1 = \omega R\sin\theta$ dan kecepatan akibat gravitasi $v_2 = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$ sin (90 + $\theta$) = $\sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$ cos $\theta$ (dicari dari hukum kekekalan energi).

***1.58.*** *Sebuah benda bermassa m ditarik keatas sebuah bukit oleh gaya* ***F*** *yang arahnya senantiasa menyinggung lintasan. Hitung usaha yang dilakukan gaya ini, jika tinggi bukit adalah h, panjang mendatar bukit L, dan koefisien gesekan* $\mu$*!*




***Jawab:*** Usaha yang dilakukan oleh gaya gesekan adalah:

$$W_f = \mu mgL.$$

Untuk membuktikan ini silahkan Anda menghitung $W_f$ ini jika bukit dianggap berbentuk segitiga, Anda akan mendapati bahwa usaha gaya gesekan tidak tergantung pada bentuk lintasan tetapi hanya tergantung pada jarak mendatarnya. (dapatkah anda memikirkan apa alasan fisis untuk hasil ini?)

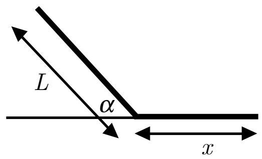
Usaha yang dilakukan oleh gaya gravitasi adalah: $W_g = mgh$.

Usaha oleh gaya $F$ digunakan untuk melawan usaha gaya gesek + usaha gaya gravitasi. Jadi:

$$W = W_f + W_g = \boxed{\mu mgL + mgh}$$


Disini kita anggap tidak terjadi perubahan energi kinetik (energi kinetik awal dan energi kinetik akhirnya nol). Dengan kata lain kita anggap ketika benda sampai dipuncak bidang miring, benda tepat berhenti.

**1.59.** *Sebuah benda bermassa $m$ = 50 g meluncur tanpa kecepatan awal pada suatu bidang miring dengan sudut miring 30º (lihat gambar). Benda ini kemudian melewati lintasan mendatar dan berhenti setelah menempuh jarak 50 cm. Hitung usaha yang dilakukan oleh gaya gesekan sepanjang lintasan yang dilalui benda ini! Anggap koefisien gesekan antara bidang dengan benda $\mu$ = 0,15.*




***Jawab:*** Pada proses ini gravitasi melakukan usaha dari puncak sampai dasar bidang miring sebesar: $W_g = mgL \sin \alpha$. Disini terjadi perubahan energi potensial menjadi energi kinetik. Energi kinetik ini kemudian diubah lagi menjadi energi panas melalui gesekan. Usaha oleh gaya gesekan adalah:

$$W_f = \mu mgL \cos \alpha + \mu mgx$$

Usaha oleh gaya gravitasi ini sama dengan gaya gesekan.

$$mgL \sin \alpha = \mu mg \cos \alpha \; L + \mu mgx$$

$$L = \frac{\mu mgx}{mg \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha}$$

Masukkan harga $L$ ini ke rumus $W_f$ di atas kita peroleh:

$$\boxed{W = \frac{\mu mgx}{1 - \mu \cot\alpha} = 0{,}05 \text{ J}}$$

**1.60.** *Dua balok bermassa $m_1$ dan $m_2$ dihubungkan dengan pegas ringan pada suatu lantai datar. Koefisien gesekan antara batang-batang dan lantai $\mu$. Hitung gaya minimum (mendatar) yang harus diberikan agar batang bermassa $m_1$ dapat menggeser balok lainnya!*


***Jawab:*** Anggap penambahan panjang pegas $x$. Usaha yang dilakukan oleh gaya $F$ adalah: $W_F = Fx$. Energi yang diterima $F$ ini akan disimpan sebagai energi potensial dan sebagai usaha untuk melawan gaya gesek.

$$Fx = \tfrac{1}{2} kx^2 + \mu m_1 gx$$

Perhatikan bahwa pada kasus ini usaha oleh gaya gesekan hanya bekerja pada $m_1$ saja (benda $m_2$ tidak berubah tempat).

Untuk benda 2 gaya pegas yang dialaminya sama besar dengan gaya gesekan yang dialaminya.

$$kx = \mu m_2 g$$

Dari kedua persamaan di atas kita peroleh:

$$\boxed{F = \mu g\left(\tfrac{m_2}{2} + m_1\right)}$$

**1.61.** *Sebuah benda bermassa m dilempar dengan sudut elevasi $\alpha$ dan dengan kecepatan awal $v_0$. Hitung daya rata-rata yang dilakukan oleh gaya gravitasi selama gerakan dan daya sesaat sebagai fungsi waktu!*

***Jawab:*** Daya rata-rata adalah usaha total yang dilakukan oleh gravitasi dibagi waktu total. Karena usaha total yang dilakukan oleh gravitasi sama dengan nol (benda kembali keketinggian semula), maka:

$$\langle P \rangle = 0$$

Karena kecepatan sesaat partikel adalah

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} \\ &= (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha - gt)\mathbf{j} \end{aligned}$$

dan gaya gravitasi yang bekerja pada benda adalah $F = -mg\mathbf{j}$.

Maka daya sesaat,

$$\boxed{P = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = mg(gt - v_0 \sin \alpha)}$$

**1.62.** *Sebuah benda kecil bermassa m diletakan pada pada suatu bidang datar di titik O. Benda tersebut diberi kecepatan awal mendatar $v_0$. Hitung daya rata-rata yang dilakukan oleh gaya gesekan selama gerakan (hingga ia berhenti), bila koefisien gesekan $\mu = 0{,}27$, $m = 1{,}0$ kg, dan $v_0 = 1{,}5$ m/s!*

***Jawab:*** Daya rata-rata oleh gaya gesekan adalah usaha yang dilakukan oleh gaya gesekan dibagi dengan waktu total. Usaha yang dilakukan gaya gesekan sama dengan perbedaan energi kinetik awal dengan akhir (ingat bahwa pengurangan kecepatan benda adalah karena pengaruh gaya gesekan).

$$W = \Delta E_k$$

Waktu total dapat dihitung dengan:

$$v = v_0 - at \text{ atau } t = {}^{v_0}\!/_{a}$$

Perlambatan $a$ disebabkan karena gesekan, sehingga; $a = {}^{f}\!/_{m} = \mu g.$

Jadi, daya rata-rata yang dilakukan oleh gaya gesekan

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta E_k}{\Delta t} = \frac{m v_0 \mu g}{2} = \boxed{2 \text{ watt}}$$

**1.63.** *Suatu sistem yang terdiri dari dua pegas yang dihubungkan secara seri dan memiliki konstanta pegas $k_1$ dan $k_2$. Hitung usaha minimum yang harus dilakukan untuk merenggangkan sistem sepanjang $\Delta l$!*

***Jawab:*** Jika sistem ini diberi gaya maka pegas akan meregang. Jika gayanya cukup besar, sistem akan bergerak. Usaha minimum adalah usaha yang diperlukan cukup untuk meregangkan pegas saja.

Jika pegas ditarik oleh gaya $F$ dan pegas teregang masing masing sebesar $\Delta l_1$ dan $\Delta l_2$, maka: $F = k_1\Delta l_1 = k_2\Delta l_2$.

Sehingga,

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = {}^{F}\!/_{k_1} + {}^{F}\!/_{k_2}$$

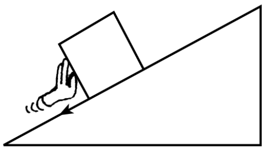
atau

$$F = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\Delta l$$

Karena besarnya gaya berubah-ubah tergantung pada besarnya regangan pegas, maka usaha oleh gaya yang kita berikan itu harus dirata-ratakan. Jadi:

$$\boxed{W = F_{rata}\Delta l = \tfrac{1}{2}\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)\Delta l^2}$$

***1.64.*** *Sebuah benda bermassa m didorong dengan kecepatan awal $v_0$ ke atas sebuah bidang miring kasar dengan sudut miring $\alpha$ dan dengan koefisien gesekan $\mu$. Hitung jarak total yang ditempuh benda itu sebelum benda berhenti! Hitung juga usaha yang dilakukan oleh gaya gesekan sepanjang jarak ini!*



***Jawab:*** Usaha yang dilakukan oleh gaya gesekan dan gaya gravitasi digunakan untuk menghentikan benda. Dengan kata lain usaha ini digunakan untuk mengubah energi kinetik menjadi nol.

$$W = Fs$$

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 = (\mu mg \cos \alpha + mg \sin \alpha)s$$

atau,

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\mu \cos\alpha + \sin\alpha)}$$

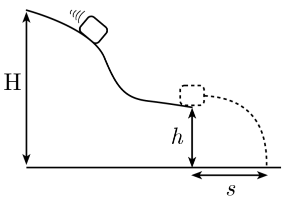
Usaha yang dilakukan oleh gaya gesekan: $W = -fs$, atau

$$W = -\mu mg \cos \alpha \frac{v_0^2}{2g(\mu \cos\alpha + \sin\alpha)}$$

Atau:

$$\boxed{W = \frac{-\mu m v_0^2}{2(\mu + \tan\alpha)}}$$

***1.65.*** *Sebuah benda kecil A meluncur tanpa kecepatan awal dari puncak suatu bukit setinggi H. Hitung tinggi h agar s maksimum! Hitung jarak maksimum ini!*




***Jawab:*** Dari ketinggian $H$ ke ketinggian $h$ terjadi perubahan energi energi potensial ($mgH - mgh$). Energi potensial yang hilang ini diubah menjadi energi kinetik ($\tfrac{1}{2} mv^2$).

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = mgH - mgh$$

atau,

$$v = \sqrt{2g(H-h)}$$

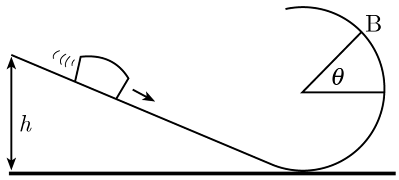
Setelah turun dari bukit, benda akan bergerak seperti lintasan peluru yang dilemparkan dengan kecepatan mendatar $v$.

$$h = \tfrac{1}{2} gt^2 \quad \text{atau} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

karena $s = vt$ maka, $s = \sqrt{4(H-h)h}$ .

Jarak $s$ ini maksimum, bila $H - h = h$ (anda bisa buktikan ini dengan memasukan nilai-nilai $H$ dan $h$ atau dengan menggunakan konsep kalkulus, jika Anda sudah belajar). Jadi: $\boxed{s_{max} = H}$.

**1.66.** *Sebuah benda A meluncur pada suatu bidang miring dari ketinggian h. Benda melanjutkan perjalanan pada setengah lingkaran berjari-jari $h/2$. Abaikan gesekan, tentukan kecepatan benda pada titik tertinggi lintasan!*




***Jawab:*** Anggap setelah menuruni bidang miring, benda bergerak dalam lingkaran vertikal dan meninggalkan lingkaran pada sudut $\theta$ diukur dari garis mendatar.

Perubahan energi potensialnya adalah

$$\Delta U = mgh - mg(h/2 + h/2 \sin \theta)$$

Energi potensial yang hilang ini diubah menjadi energi kinetik. Sehingga,

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = \frac{mgh(1-\sin\theta)}{2}$$

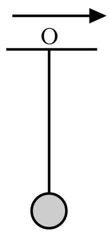
Gaya normal di titik B adalah nol (karena benda akan meninggalkan lingkaran), akibatnya gaya sentrifugal yang dirasakan benda sama dengan $mg \sin \theta$.

$$\frac{mv^2}{h/2} = mg \sin \theta$$

Dari dua persamaan di atas kita peroleh, $v = \sqrt{\frac{gh}{3}}$.

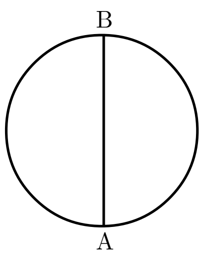
Setelah meninggalkan bidang lingkaran, benda bergerak dalam lintasan parabola. Di titik maksimum kecepatannya hanya kecepatan arah horizontal saja, yaitu:

$$\boxed{V_{max} = v \sin \theta = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{gh}{3}}}$$




**1.67.** *Sebuah bola kecil bermassa m digantungkan pada seutas tali yang panjangnya L. Berapa kecepatan minimum bola relatif terhadap titik putar O agar bola dapat bergerak sepanjang lingkaran penuh? Hitung tegangan tali ketika bola berada di titik terendah!*

***Jawab:*** Agar benda mencapai titik tertinggi maka tegangan tali di titik tertinggi nol (ada yang menyatakan bahwa agar benda mencapai titik tertinggi kecepatan di titik tertinggi nol, ini tidak benar karena sebelum mencapai kecepatan nol, tegangan tali akan mencapai nol akibatnya benda tidak dapat melanjutkan gerak melingkarnya).




Dengan menggunakan hukum Newton, kita dapat menghitung kecepatan di titik tertinggi $v'$:

$$mg + 0 = \frac{mv'^2}{L}$$

Pada gerakan A ke B, sebagian energi kinetik diubah menjadi energi potensial ($mg2L$). Sehingga: $\tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv'^2 = mg2L$.

Dari dua persamaan di atas kita peroleh, $v = \sqrt{5gL}$.

Di titik terendah:

$$\boxed{T = \frac{mv^2}{L} + mg = 6mg}$$

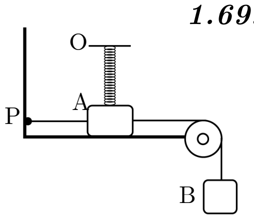
***1.68.*** *Seutas tali karet panjang L dan koefisien elastisitas k digantung pada titik O. Ujung tali lainnya dihubungkan dengan benda bermassa m. Benda dilepaskan dari titik O. Abaikan massa tali dan massa penjepit, hitung pertambahan panjang karet!*

***Jawab:*** Anggap karet bertambah panjang $\Delta l$. Disini terjadi pengubahan energi potensial gravitasi menjadi energi kinetik benda, kemudian seluruh energi kinetik ini diubah menjadi energi potensial karet.

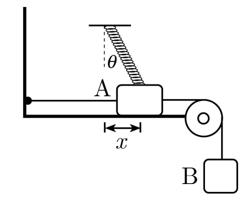
$$mg\ (l + \Delta l) = \tfrac{1}{2}\, k\Delta l^2$$

atau,

$$\boxed{\Delta l = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}}\right)\frac{mg}{k}}$$




***1.69.*** *Sebuah balok kecil A bermassa m diikat oleh tali pada titik P. Sistem diletakkan pada bidang licin dan dihubungkan dengan beban B yang bermassa m melalui suatu katrol tak bermassa. Balok A juga dihubungkan dengan suatu pegas yang digantung pada titik O. Panjang pegas $l_0$ = 50 cm dan konstanta pegasnya $k = 5\ mg/l_0$. Beberapa saat kemudian tali PA dibakar, hitung kecepatan balok A sesaat hendak meninggalkan bidang!*




***Jawab:*** Anggap balok A telah berpindah sejauh $x$ ketika balok meninggalkan bidang. Karena balok dalam keadaan seimbang maka $mg = F \cos \boldsymbol{\theta}$. Dengan $F$ adalah gaya pegas.

Atau: $k{\cdot}\Delta l\ {}^{l_0}\!/_{l} = mg.$

Selanjutnya silahkan Anda buktikan bahwa:

$$kl_0\left[\sqrt{1 + \left(\frac{x}{l_0}\right)^2} - 1\right]{}^{l_0}\!/_{l} = mg$$

Substitusi nilai $k$ kita peroleh, $x = {}^{3l_0}\!/_{4}$ dan $\Delta l = {}^{l_0}\!/_{4}$.

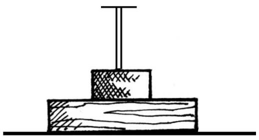
Pada proses ini benda B jatuh akibat gaya gravitasi. Disini terjadi perubahan energi potensial menjadi energi kinetik + energi pegas. Energi kinetik merupakan energi kinetik untuk 2 benda.

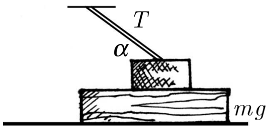
$$\tfrac{1}{2}\, k(\Delta l)^2 + (2)\,\tfrac{1}{2}\, mv^2 = mgx$$

Dengan menyelesaikan persamaan di atas kita peroleh,

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{19gl_0}{32}} = 1{,}7\ m/s}$$

**1.70.** *Pada suatu bidang datar terdapat sebuah papan yang di atasnya terletak balok bermassa m = 1,0 kg. Balok dihubungkan dengan titik O melalui seutas tali elastik ringan yang panjangnya $l_0$ = 40 cm. Koefisien gesekan antara balok dan papan $\mu$ = 0,20. Kemudian papan digeser perlahan-lahan ke kanan. Ketika sudut $\theta$ = 30° balok hampir bergerak relatif terhadap papan. Hitung usaha yang dilakukan oleh gaya gesekan!*






***Jawab:*** Karena sistem setimbang maka,

$$T \sin \theta = \mu N$$
$$T \cos \theta + N = mg$$

Dari kedua persamaan ini kita peroleh,

$$T = \frac{\mu mg}{\sin\theta + \mu\cos\theta}$$

Dapat dibuktikan bahwa pertambahan panjang tali adalah:

$$\Delta l = l_0\left[\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right]$$

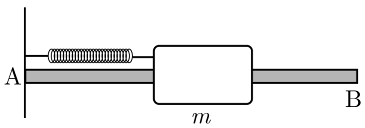
Pada sistem ini usaha yang dilakukan oleh gaya gesekan sama dengan energi potensial yang tersimpan dalam tali.

$$W = T_{rata\text{-}rata} \times \Delta l = \frac{0+T}{2}\Delta l$$
$$= \frac{\mu mg}{2(\sin\theta + \mu\cos\theta)}\left(\frac{l_0(1-\cos\theta)}{\cos\theta}\right)$$

atau,

$$W = \frac{\mu mgl_0(1-\cos\theta)}{2(\sin\theta + \mu\cos\theta)\cos\theta}$$
$$= \boxed{0{,}09\ J}$$

**1.71.** *Sebuah batang horisontal AB yang ringan dan licin dapat berputar pada sumbu yang melalui ujung batang A.*




*Sebuah benda bermassa m dapat bergerak bebas pada batang dan dihubungkan dengan ujung A melalui sebuah pegas tak bermassa yang panjangnya $l_0$ dan konstanta pegasnya k. Berapa usaha yang harus dilakukan agar perlahan-lahan sistem akan mencapai kecepatan sudut $\omega$?*

***Jawab:*** Pada saat benda berputar maka gaya sentripetal yang bekerja adalah gaya pegas. Menurut hukum Newton *(F = ma).*

$$k\Delta l = m\omega^2(l_0 + \Delta l)$$

atau,

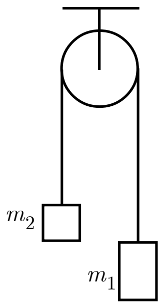
$$\Delta l = \frac{m\omega^2 l_0}{k - m\omega^2}$$

Usaha yang dilakukan pada sistem akan disimpan sebagai energi pegas dan sebagian akan diubah menjadi energi kinetik rotasi benda.

$$W = \tfrac{1}{2} k\Delta l^2 + \tfrac{1}{2} m\omega^2 (l_0 + \Delta l)^2$$

$$= \tfrac{1}{2} k\Delta l^2 \left(1 + \tfrac{1}{\eta}\right) = \boxed{\tfrac{1}{2} \eta k l_0^2 \frac{(1+\eta)}{(1-\eta)^2}}$$

dimana $\left(\eta = \dfrac{m\omega^2}{k}\right)$.




***1.72.*** *Dua massa $m_1$ dan $m_2$ dihubungkan melalui suatu katrol yang massanya diabaikan. Hitung percepatan pusat massa dari sistem ini! Abaikan massa tali dan gesekan katrol.*

***Jawab:*** Misalkan benda $m_1 > m_2$.

Benda 1: $m_1 g - T = m_1 a$

Benda 2: $T - m_2 g = m_2 a$

Dari kedua persamaan ini kita peroleh:

$$\boxed{a = \frac{(m_1 - m_2)\, g}{m_1 + m_2}}$$

Percepatan pusat massa dapat dicari dengan konsep pusat massa. Posisi pusat massa adalah:

$$\vec{x}_{pm} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

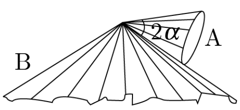
Jadi percepatan pusat massanya adalah:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2}$$

Karena $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2 = a$ (arahnya berlawanan):

$$a_{cm} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 g$$

***1.73.*** *Sebuah kerucut A bermassa $m$ = 3,2 kg dan setengah sudut puncak $a$ = 10$^o$ menggelinding tanpa slip sepanjang permukaan kerucut B sedemikan hingga puncak kerucut O tetap diam. Pusat gravitasi kerucut A sama tingginya dengan titik O dan berada pada jarak $l$ = 17 cm. Sumbu kerucut A berputar dengan kecepatan sudut $\omega$. Hitung:*

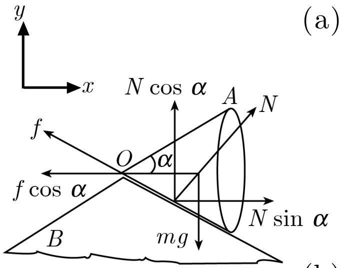



*(a) gaya gesekan statis pada kerucut A, jika $\omega$ = 1,0 rad/s;*

*(b) pada nilai $\omega$ berapakah kerucut A akan menggelinding tanpa slip, jika koefisien gesekan antara permukaan adalah $\mu$ = 0,25.*

***Jawab:*** Perhatikan susunan gaya pada gambar.

$N$ adalah gaya normal yang merupakan reaksi dari kerucut B pada kerucut A. Gaya gesekan $f$ arahnya ke atas karena kita anggap kerucut mempunyai kecenderungan untuk bergerak ke bawah. $l$ adalah jarak pusat massa terhadap pusat putaran.




(a) Arah sumbu $x$: $F = ma$

$$f \cos \alpha - N \sin \alpha = m\omega^2 l$$

Arah sumbu $y$: $F = ma_y = 0$

$$f \sin \alpha + N \cos \alpha = mg$$

Dari kedua persamaan itu kita akan peroleh,

$$f = mg \sin \alpha + m\omega^2 l \cos \alpha = \boxed{6 \text{ N}}$$

(b) Seperti soal a kita peroleh:

$$N \cos \alpha + \mu N \sin \alpha = mg$$

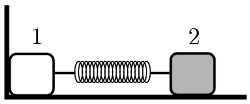
Agar kerucut tidak slip maka:

$$\mu N \cos \alpha - N \sin \alpha \geqslant m\omega^2 l$$

Dari persamaan di atas kita peroleh:

$$\omega \leqslant \sqrt{\frac{g(\mu - \tan\alpha)}{l(1 + \mu \tan\alpha)}} = \boxed{2 \text{ rad/s}}$$

**1.74.** *Dua balok bermassa $m_1$ dan $m_2$ dihubungkan dengan sebuah pegas tak bermassa dengan konstanta pegas k. Sistem diletakkan dalam bidang datar licin. Balok 2 kemudian ditekan ke kiri sejauh x lalu dilepaskan. Hitung kecepatan pusat massa sistem sesaat setelah balok 1 meninggalkan dinding!*




***Jawab:*** Saat balok $m_2$ dilepaskan maka terjadilah perubahan energi dari energi potensial pegas menjadi energi kinetik dari benda 2 (benda 1 masih diam karena ditahan dinding).

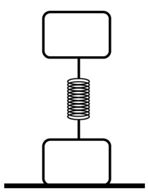
$$\tfrac{1}{2} kx^2 = \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$v_2 = x\sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

Kecepatan pusat massa sistem dapat dicari dengan rumus pusat massa

$$v_c = \frac{m_2\vec{v}_2 + m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} = \frac{x}{m_1 + m_2}\sqrt{km_2}$$

**1.75.** *Suatu sistem terdiri dari dua kubus identik, masing-masing bermassa m. Kedua kubus ini dihubungkan oleh seutas tali dan suatu pegas tak bermassa yang terkompres/tertekan, yang mempunyai konstanta pegas k. Pada suatu ketika tali penghubung kubus dibakar, hitung berapa besar pegas mula-mula harus tertekan agar kubus yang bawah akan terangkat. Hitung kenaikan pusat massanya, jika pegas mula-mula tertekan sebesar $\Delta l = 7\ mg/k$!*



***Jawab:***

a) Energi total awal,

$$E_{awal} = \tfrac{1}{2} k(\Delta l)^2 + mg(l - \Delta l)$$

Energi total akhir sistem (pegas teregang $x$):

$$E_{akhir} = \tfrac{1}{2} kx^2 + mg(l + x)$$

Karena energi awal = energi akhir kita akan peroleh,

$$kx = -mg + \sqrt{(mg - k\Delta l)^2}$$
$$= -mg + (mg - k\Delta l)$$

atau,

$$kx = k\Delta l - 2mg$$

Kubus bawah akan naik, jika

$$kx \geqslant mg$$

atau,

$$k\Delta l - 2mg \geqslant mg$$

atau,

$$\boxed{\Delta l \geqslant 3\ mg/k}$$

b) Mula-mula pegas tertekan sejauh $\Delta l = 7\ mg/k$.

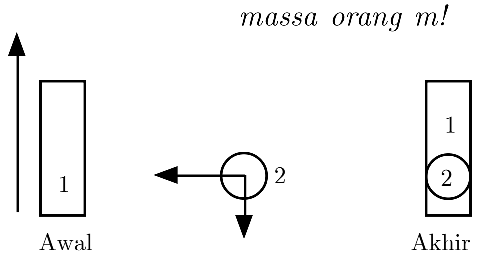
Kita hitung dulu kecepatan benda atas ketika benda bawah hampir naik (telah dihitung pada soal a bahwa saat ini pegas teregang $x = mg/k$). Disini terjadi perubahan energi pegas pada keadaan tertekan $\Delta l = 7\ mg/k$ menjadi energi potensial benda atas, energi kinetik benda atas dan energi pegas sistem pada keadaan teregang $x = mg/k$)

$$\tfrac{1}{2} k\Delta l^2 = mg\ (x+\Delta l) + \tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} kx^2$$

Kecepatan pusat massa sistem adalah $v/2$. Pusat massa sistem akan naik ke atas. Pada kondisi ini seluruh energi kinetik pusat massa diubah menjadi energi potensial $1/2(2m)(v/2)^2 = (2m)gh$. Diperoleh :

$$\boxed{h = 8mg/k}$$

**1.76.** *Dua kereta sejenis masing-masing memuat 1 orang. Kereta ini bergerak dalam arah berlawanan. Pada suatu saat ketika kereta sejajar, kedua orang itu bertukar tempat dengan melompat tegak lurus terhadap arah gerakan kereta. Sebagai akibatnya, kereta 1 berhenti dan kereta 2 tetap bergerak dalam arah yang sama, dengan kecepatan v. Tentukan kecepatan awal masing-masing kereta jika massa tiap kereta M dan massa orang m!*




***Jawab:*** Kita fokuskan perhatian pada sistem kereta 1 dan orang 2 sesaat sebelum orang 2 masuk dalam kereta.

Perhatikan momentum yang **sejajar** arah gerak kereta. Momentum sistem kereta 1 adalah:

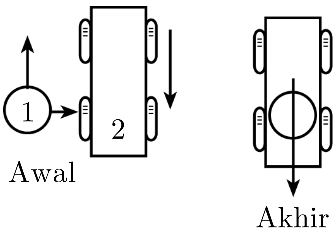
$$P_1 = Mv_1 - mv_2$$

Momentum akhir: $P'_1 = 0$.

Karena momentum kekal maka:

$$Mv_1 = mv_2$$

Sekarang perhatikan kereta 2 dan orang 1.




Perhatikan momentum sejajar arah gerakan kereta 2:

$$P_2 = Mv_2 - mv_1$$

Momentum akhir: $P'_2 = (M + m)v$

Karena momentum kekal maka,

$$Mv_2 - mv_1 = (m + M)v$$

Dari persamaan-persamaan di atas kita peroleh:

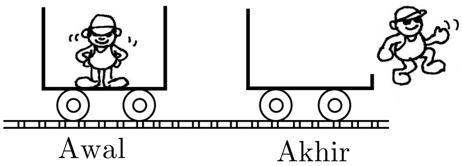
$$\boxed{v_1 = \frac{mv}{M - m}}$$

dan

$$\boxed{v_2 = \frac{Mv}{M - m}}$$

***1.77.*** *Dua kereta sejenis bergerak beriringan dengan kecepatan sama* $v_0$. *Seseorang bermassa m berada dalam kereta belakang. Pada saat tertentu, orang tersebut melompat ke dalam kereta depan dengan kecepatan u relatif terhadap keretanya. Jika massa masing-masing kereta M, hitung kecepatan tiap kereta sekarang!*

***Jawab:*** Perhatikan keadaan kereta belakang.




Momentum mula-mula:

$$P_2 = (M + m)v_0$$

Orang melompat dengan kecepatan $u$ relatif terhadap kereta, sehingga kecepatan orang terhadap tanah adalah:

$$v_{org} = u + v_2$$

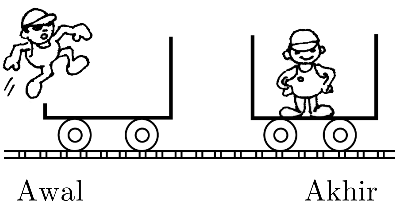
dimana $v_2$ adalah kecepatan kereta belakang terhadap tanah setelah orang melompat.

Momentum akhir (perhatikan bahwa momentum selalu diukur terhadap tanah):

$$P'_2 = Mv_2 + mv_{org} = Mv_2 + m(u + v_2)$$

Gunakan hukum kekekalan momentum sehingga kita peroleh,

$$(M + m)v_0 = (M + m)v_2 + mu$$




Sekarang perhatikan kereta depan:

Momentum awal:

$$P_1 = Mv_0 + mv_{org}$$

Momentum akhir:

$$P_1' = (M + m)v_1$$

Gunakan kekekalan momentum, kita peroleh:

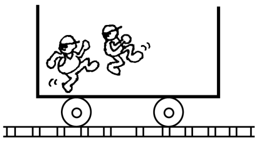
$$Mv_0 + m(u + v_2) = (M + m)v_1$$

Dari persamaan-persamaan di atas kita peroleh,

$$\boxed{v_2 = v_0 - \frac{mu}{M + m}}$$

dan

$$\boxed{v_1 = v_0 + \frac{mMu}{(M+m)^2}}$$



***1.78.*** *Dua orang, masing-masing bermassa m, berdiri pada ujung kereta yang diam bermassa M. Abaikan gesekan, tentukan kecepatan kereta setelah kedua orang tersebut melompat keluar kereta dengan kecepatan mendatar u relatif terhadap kereta jika kedua orang itu melompat*
*(a) secara bersamaan;*
*(b) satu persatu.*
*Dari kedua kasus, manakah yang memberikan kecepatan yang lebih besar?*

***Jawab:***

(a) Momentum mula-mula: $P = 0$

Anggap kecepatan orang terhadap tanah $v_0$ dan kecepatan kereta setelah orang berlari adalah $v_k$.

Karena kereta dan orang bergerak berlawanan maka, kecepatan relatif orang terhadap kereta adalah: $u = v_k + v_0$.

Momentum akhir:

$$P' = 2mv_0 - Mv_k$$
$$= -(2m + M)v_k + 2mu$$

Gunakan hukum kekekalan momentum, kita peroleh:

$$\boxed{v_k = \frac{2mu}{2m+M}}$$

(b) Ketika orang pertama berlari kita peroleh kecepatan kereta adalah (gunakan soal a di atas):

$$v_k = \frac{mu}{M+m}$$

Ketika orang kedua berlari kereta saat itu sedang bergerak dengan kecepatan $v_k$ sehingga momentum awal sistem adalah:

$$P = (m + M)v_k$$

(ingat hanya tinggal 1 orang dalam kereta)

Dengan cara seperti cara *a* kita akan peroleh,

$$\boxed{v_k' = \left(\frac{mu}{M+2m} + \frac{mu}{M+m}\right)}$$

Dari hasil yang diperoleh terlihat bahwa $v_k < v_k'$ sehingga dapat disimpulkan bahwa kereta akan lebih cepat jika orang melompat secara berturutan.

**1.79.** *Sebuah bola baja bermassa $m = 50$ g jatuh dari ketinggian $h = 1{,}0$ m pada permukaan horisontal sebuah papan tebal. Tentukan momentum total yang diberikan bola pada papan setelah terpental beberapa kali, bila setiap kali tumbukan kecepatan bola berkurang $\eta = 1{,}25$ kali!*

***Jawab:*** Ketika bola dijatuhkan dari ketinggian $h$ maka energi potensial diberikan menjadi energi kinetik ($mgh = \frac{1}{2} mv^2$) atau $v = \sqrt{2gh}$ .

Momentum sebelum tumbukan pertama:

$$P_1 = mv$$

Momentum akhir setelah tumbukan pertama:

$$P'_1 = m\left(-v/\eta\right)$$

(tanda negatif karena bola berbalik arah).

Jadi, perubahan momentum bola setelah tumbrukan pertama:

$$\Delta P_1 = P'_1 - P_1$$

$$\Delta P_1 = -mv\left(\frac{1}{\eta} + 1\right)$$

Tumbukan kedua.

Momentum awal: $P_2 = m\dfrac{v}{\eta}$

Momentum akhir setelah tubrukan kedua:

$$P'_2 = -m\frac{v}{\eta^2}$$

Jadi, perubahan momentum setelah tubrukan kedua:

$$\Delta P_2 = P'_2 - P_2$$

$$\Delta P_2 = -m\frac{v}{\eta}\left(\frac{1}{\eta} + 1\right)$$

Dengan cara yang sama, untuk tubrukan ketiga:

$$\Delta P_3 = -m\frac{v}{\eta^2}\left(\frac{1}{\eta} + 1\right)$$

Dengan demikian, perubahan total momentum bola:

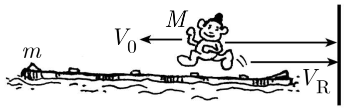
$$\begin{aligned} \Delta P &= \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 \\ &= -mv\frac{(\eta + 1)}{\eta}\left(1 + \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^2} + \dots\right) \\ &= -mv\frac{(\eta + 1)}{\eta}\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{\eta}}\right] \end{aligned}$$

atau,

$$\boxed{\Delta P = -m\sqrt{2gh}\,\frac{(\eta + 1)}{(\eta - 1)}}$$

Jadi, momentum yang diberikan pada papan: $\Delta P' = -\Delta P$ dengan memasukkan angkanya kita peroleh: $\Delta P' = 0{,}2$ kg.m/s.

**1.80.** *Seorang bermassa m berdiri di atas sebuah rakit yang bermassa M. Orang ini kemudian bergerak dengan kecepatan v' (dan percepatan a') relatif terhadap rakit sejauh L'. Hitung perpindahan rakit relatif terhadap pantai! Hitung juga gaya mendatar yang dikerjakan oleh orang itu terhadap rakit selama gerakan!*




***Jawab:***

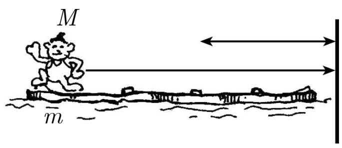
(a) Anggap rakit bergerak dengan kecepatan $V_R$ dan orang bergerak relatif terhadap rakit dengan kecepatan $V_0$.

Momentum orang (terhadap tanah) $m(V_0 - V_R)$
Momentum rakit (terhadap tanah) $-MV_R$.

$$m(V_0 - V_R) - MV_R = 0$$

$$V_R = \frac{m}{M+m}V_0$$

Waktu yang diperlukan orang menempuh $L$ adalah $\dfrac{L'}{V_0}$




Jadi perpindahan rakit menurut pantai adalah

$$L = V_R \cdot t = \frac{m}{M+m}V_0\frac{L'}{V_0} = \frac{m}{M+m}L'$$

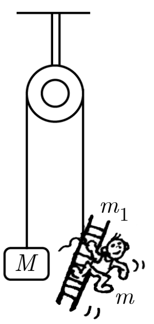
(b) Dari persamaan $L$ di atas kita bisa katakan bahwa percepatan rakit adalah:

$$a = \frac{ma'}{M+m}$$

Dengan hukum Newton, kita peroleh bahwa besarnya gaya yang diberikan orang pada rakit adalah:

$$\boxed{F = \frac{mMa'}{M+m}}$$

**1.81.** *Pada sebuah katrol dilewatkan seutas tali kuat. Pada salah satu ujung tali tergantung sebuah tangga dengan seorang bermassa m berada di dasar tangga. Pada ujung lain digantungkan beban bermassa M. Orang ini kemudian naik setinggi h' relatif terhadap tangga, lalu berhenti. Abaikan massa tali dan gesekan, hitung perpindahan pusat massa sistem!*



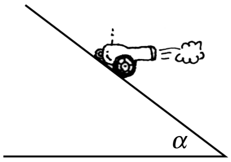

***Jawab:*** Anggap orang ($m$) naik sejauh $x_1$ dari posisi semula dan tangga ($M - m$) turun sejauh $x_2$ dari posisi semula. Karena tali tidak lentur maka beban $M$ naik sejauh $x_2$ (akibat turunnya tangga). Perubahan posisi pusat massa sistem adalah

$$\Delta = \frac{mx_1 - (M-m)x_2 + Mx_2}{M + m + (M-m)}$$

$$= \frac{m(x_1 + x_2)}{2M}$$

$$= \frac{mh'}{M}$$

**1.82.** *Sebuah meriam bermassa m meluncur di atas bidang miring dengan sudut miring* $\alpha$*. Setelah meriam menempuh jarak l sebuah peluru ditembakkan dalam arah mendatar dengan momentum P. Sebagai akibatnya, meriam berhenti. Anggap massa peluru diabaikan bila dibandingkan dengan massa meriam, tentukan lama tembakan.*




***Jawab:*** Kecepatan meriam setelah menempuh jarak $l$ (gunakan $mgh = \frac{1}{2} mv^2$) adalah:

$$v = \sqrt{2gl \sin\alpha}$$

Momentum awal meriam:

$$P_1 = m\sqrt{2gl \sin\alpha}$$

Selama t detik gravitasi memberikan impuls sebesar $(mg \sin\alpha)t$.

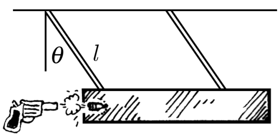
Komponen momentum arah sejajar bidang miring harus bisa mengalahkan impuls gravitasi dan momentum awal ini sehingga

$$P \cos\alpha = m\sqrt{2gl \sin\alpha} + (mg \sin\alpha)t$$

atau

$$\boxed{t = \frac{P\cos\alpha - m\sqrt{2gl\sin\alpha}}{mg\sin\alpha}}$$

**1.83.** *Sebuah peluru bermassa m ditembakkan ke dalam suatu balok bermassa M yang digantungkan oleh dua utas tali dengan panjang l. Balok ini berayun sedemikian sehingga tali membentuk sudut* $\theta$ *(maksimum) dengan vertikal. Anggap m ≪ M, hitung:*




*(a) kecepatan peluru sebelum menumbuk balok;*
*(b) energi kinetik yang berubah menjadi panas.*

***Jawab:***

(a) Kenaikan balok setelah peluru masuk adalah:

$$\Delta h = l - l\cos\theta$$

Ketika balok naik energi kinetik diubah menjadi energi potensial. Sehingga:

$$\frac{1}{2}(M + m)v'^2 = (m + M)g\Delta h$$

$v'$ disini adalah kecepatan balok setelah ditumbuk peluru.

Sekarang perhatikan tumbukan peluru dengan balok:

Sebelum tumbukan: $P = mv$

Sesudah tumbukan: $P = (M + m)v'$

Karena momentum kekal (balok dan peluru dianggap benda titik) maka:

$$mv = (M + m)v'$$

Dari persamaan energi dan persamaan momentum di atas kita peroleh:

$$v = 2\left(\frac{M+m}{m}\right)\sqrt{gl}\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Bila $m \ll M$, maka;

$$v = 2\left(\frac{M}{m}\right)\sqrt{gl}\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

(b) Energi kinetik awal sistem:

$$E_k = \tfrac{1}{2} mv^2$$

Energi kinetik akhir sistem setelah tumbukan inelastis:

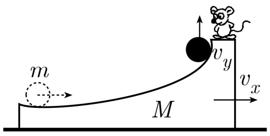
$$E_k' = \tfrac{1}{2}(M + m)v'^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{m^2v^2}{(M+m)}$$

Jadi energi yang hilang adalah:

$$\boxed{\Delta E_k = E_k \frac{M}{(M+m)}}$$

**1.84.** *Sebuah cakram kecil bermassa m diletakan di atas benda bermassa M yang terletak pada bidang datar licin. Cakram kemudian diberi kecepatan v. Hitung sampai ketinggian berapa cakram ini akan naik setelah meninggalkan benda M! Abaikan semua gesekan.*




***Jawab:*** Cakram $m$ dan benda $M$ akan bertumbukan. Anggap ketika cakram mencapai ujung atas bidang, kecepatan M (dan m) arah mendatar adalah $v_x$.

Kekekalan momentum arah sumbu $x$:

$$mv = (M + m)v_x$$

Kekekalan energi (tumbukan elastik) di ujung bidang, cakram punya 2 komponen kecepatan $v_x$ dan $v_y$.

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2) + \tfrac{1}{2} Mv_x^2$$

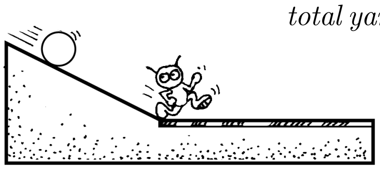
Benda $m$ akan lepas dari $M$ dengan kecepatan $v_y$. Ketinggian yang akan dicapai adalah $h$ (gunakan $\tfrac{1}{2} mv_y^2 = mgh$).

$$v_y = \sqrt{2gh}$$

Dari ketiga persamaan diatas kita akan peroleh:

$$\boxed{h = \frac{Mv^2}{2g(M+m)}}$$

**1.85.** *Sebuah benda kecil bermassa m meluncur ke bawah suatu bukit licin dari ketinggian h tanpa kecepatan awal. Di dasar bukit benda mengenai papan bermassa M. Karena gesekan antara benda dan papan, benda diperlambat dan kemudian bergerak bersama papan dengan kecepatan sama. Hitung usaha total yang dilakukan oleh gaya gesekan dalam proses ini!*



***Jawab:***

Massa $m$ jatuh dari ketinggian $h$. Dengan mengingat bahwa energi potensial diubah menjadi energi kinetik ($mgh = \frac{1}{2} mv^2$), kecepatan benda $m$ di dasar bukit adalah:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Tumbukan antara massa $m$ dan papan (momentum kekal):

$$mv = (M + m)v'$$

Dari kedua persamaan di atas kita peroleh nilai $v'$.

Usaha yang dilakukan gaya gesekan papan dengan benda sama dengan perbedaan energi kinetik:

$$W = \Delta E_k = E_k' - E_k$$

Dimana

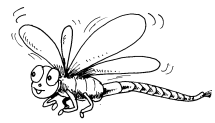
$$E_k = \frac{1}{2} mv^2$$

dan

$$E_k' = \frac{1}{2} (M + m)v'^2$$

Dari persamaan-persamaan di atas kita peroleh,

$$\boxed{W = -\frac{mMgh}{M + m}}$$



**1.86.** *Sebuah batu jatuh bebas dari ketinggian h. Batu menghantam tanah dengan kecepatan $v_0 = \sqrt{2gh}$ relatif terhadap bumi. Hitung kecepatan batu ketika menghantam tanah dilihat oleh orang yang berada dalam suatu kerangka A jatuh (bukan naik) dengan kecepatan $v_0$!*

***Jawab:*** A akan melihat batu bergerak naik dengan kecepatan $v_0$ diperlambat oleh $g$.

Posisi batu menurut A adalah

$$Y = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

setelah waktu $t_0 = \frac{v_0}{g}$

$$Y = v_0 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2$$

Posisi batu setelah menempuh jarak $h = v_0 t_0 - h$

dimana $t_0 = \frac{v_0}{g}$

Jadi, $h = \frac{1}{2} g t_0^2$

$$t_0^2 = \frac{2h}{g}$$

$$\frac{v_0^2}{g^2} = \frac{2h}{g} \rightarrow v_0 = \boxed{\sqrt{2gh}}$$

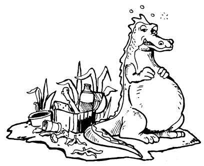
**1.87.** *Sebuah benda bermassa 1 kg bergerak dengan kecepatan $\vec{v}_1 = 3{,}0\vec{i} - 2{,}0\vec{j}$ menumbuk secara tidak lenting sama sekali benda lain yang bermassa 2 kg yang sedang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}_2 = 4{,}0\vec{j} - 6{,}0\vec{k}$. Tentukan kecepatan benda-benda ini setelah tumbukan! (semua satuan dalam MKS).*

***Jawab:*** Pada tumbukan tidak elastik, setelah tumbukan kedua benda akan bergerak dengan kecepatan sama.

$$(m_1 + m_2)\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

atau,

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$



Dengan memasukkan nilainya, kita peroleh:

$$\vec{v} = 1{,}0\,\vec{i} + 2{,}0\,\vec{j} - 4{,}0\,\vec{k}$$

Besar kecepatannya: $\boxed{v = 4{,}6\ m/s}$

**1.88.** *Tentukan perubahan energi kinetik dari suatu sistem yang terdiri dari dua benda masing-masing bermassa $m_1$ dan $m_2$ yang bertumbukan secara tidak lenting sama sekali, bila kecepatan awal benda-benda ini adalah $v_1$ dan $v_2$!*

***Jawab:*** Pada tumbukan tidak elastik, kecepatan sesudah tumbukan dari kedua benda sama besar.

Hukum kekekalan momentum:

$$(m_1 + m_2)v = m_1v_1 + m_2v_2$$

Energi kinetik awal sistem

$$E_k = \tfrac{1}{2}\,m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}\,m_2 v_2^2$$

Energi kinetik akhir sistem

$$E_k' = \tfrac{1}{2}\,(m_1 + m_2)v^2$$

Perubahan energi kinetik

$$\Delta E_k = E_k' - E_k$$

Dengan menyelesaikan persamaan di atas, kita peroleh:

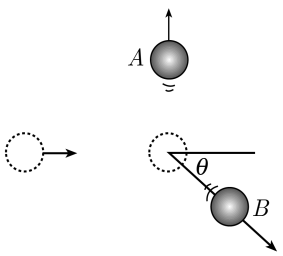
$$\boxed{\Delta E_k = \frac{-m_1m_2\,(v_1 - v_2)^2}{2\,(m_1 + m_2)}}$$

**1.89.** *Suatu partikel A bermassa $m_1$ menumbuk secara lenting sempurna partikel B yang diam dan bermassa $m_2$. Hitung berapa bagian energi kinetik partikel A yang hilang, bila:*

*(a) partikel A menyimpang tegak lurus dari gerakan semula!*

*(b) tumbukannya adalah tumbukan sentral!*

***Jawab:***




(a) Anggap $u$ adalah kecepatan partikel A sebelum tumbukan. Anggap $v_A$ dan $v_B$ adalah kecepatan A dan B setelah tumbukan.

Momentum arah sumbu $x$:

$$m_1u + 0 = 0 + m_2v_B\cos\theta$$

Momentum arah sumbu $y$:

$$0 = m_1 v_A - m_2 v_B \sin \boldsymbol{\theta}$$

Kekekalan energi kinetik (tumbukan elastik):

$$\tfrac{1}{2} m_1 u^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_A^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_B^2$$

Dari ketiga persamaan di atas kita akan peroleh:

$$\left(\frac{v_A}{u}\right)^2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

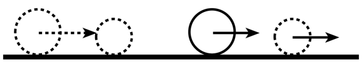
Energi yang hilang dari partikel A:

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2} m_1 u^2 - \tfrac{1}{2} m_1 v_A^2$$

Dan bagian energi kinetik yang hilang dari partikel A adalah:

$$\boxed{\Delta = \frac{\Delta E_k}{E_k} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}}$$

(b) Pada tumbukan sentral, partikel A dan B akan bergerak pada arah sumbu $x$.



Kekekalan momentum:

$$m_1 u = m_1 v_A + m_2 v_B$$

Kekekalan energi kinetik:

$$\tfrac{1}{2} m_1 u^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_A^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_B^2$$

Dari kedua persamaan di atas, kita peroleh:

$$u = \frac{(m_1 + m_2)\, v_B}{2m_1}$$

dan

$$v_A = \frac{(m_1 - m_2)\, v_B}{2m_1}$$

Bagian energi kinetik partikel A yang hilang:

$$\Delta = \left(1 - \frac{v_A^2}{u^2}\right) = \left[1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2\right]$$

atau

$$\boxed{\Delta = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}}$$

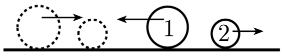
***1.90.*** *Partikel 1 bertumbukan elastik dengan partikel 2 yang diam. Tentukan perbandingan massa kedua partikel, bila:*

*(a) setelah tumbukan sentral, partikel-partikel bergerak berlawanan dengan kecepatan sama!*

*(b) setelah tumbukan, partikel-partikel bergerak secara simetri dengan sudut 60°!*

***Jawab:***

(a) Kekekalan momentum:




$$m_1 u_1 = m_1 v_1 - m_2 v_2$$

dimana, $u_1$ adalah kecepatan awal partikel 1.

Karena $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$

maka, $v = \dfrac{m_1 u_1}{m_1 - m_2}$

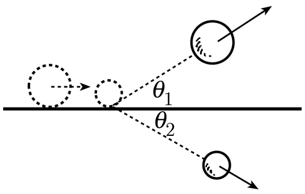
Kekekalan energi kinetik:

$$\tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Selanjutnya dari persamaan-persamaan di atas kita akan peroleh:

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}}$$

(b) Karena partikel terpisah secara simetris pada sudut 60°, $\theta_1 + \theta_2 = 60^o$, maka $\theta_1 = 30^o$ dan $\theta_2 = 30^o$.




Kekekalan momentum:

Arah sumbu $x$:

$$m_1 u_1 = (m_1 v_1 + m_2 v_2) \cos 30^o$$

Arah sumbu $y$:

$$m_1 v_1 \sin 30^o = m_2 v_2 \sin 30^o$$

Kekekalan Energi:

$$\tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Dari persamaan-persamaan diatas kita peroleh:

$$4 \cos^2 30^o = 1 + \frac{m_1}{m_2}$$

atau

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = 2}$$

***1.91.*** *Sebuah peluru bergerak dengan kecepatan $v$ = 500 m/s. Peluru ini kemudian pecah menjadi tiga bagian yang sama sehingga energi kinetik sistem meningkat $\eta$ = 1,5 kali. Hitung kecepatan terbesar dari antara ketiga komponen ini!*

***Jawab:***

Kekekalan momentum:

$$mv = \frac{m}{3} v_1 + \frac{m}{3} v_2 + \frac{m}{3} v_3$$

Karena $\eta = 1{,}5$, maka

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)v_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)v_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)v_3^2}{\frac{1}{2}mv^2}$$

$$3\eta v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

Dari persaman di atas kita peroleh,

$$3\eta v^2 = 2v_1^2 + 2v_2^2 + 9v^2 - 6vv_1 + 2v_1v_2 - 6vv_2$$

atau,

$$2v_1^2 - 2v_1(3v - v_2) + [(9 - 3\eta)v^2 + 2v_2^2 - 6vv_2] = 0$$

Dengan menggunakan rumus abc kita akan peroleh $v_1$. Pada rumus *abc,* nilai yang berada dalam akar (diskriminan) haruslah lebih besar atau sama dengan nol. Dengan kata lain:

$$4(3v - v_2)^2 - 4\cdot 2\,[(9 - 3\eta)v^2 + 2v_2^2 - 6vv_2] \geqslant 0$$

dengan menyelesaikan dan menyederhanakan persamaan di atas diperoleh:

$$\boxed{v_2 \geqslant v(1 + \sqrt{2\eta - 2}\,)}$$

Jadi,

$$v_2(\text{maksimum}) = v(1 + \sqrt{2\eta - 2}\,)$$
$$= \boxed{\mathbf{1\ km/s}}$$

***1.92.*** *Partikel 1 yang bergerak dengan kecepatan v = 10 m/s menumbuk sentral partikel 2 yang diam. Kedua partikel bermassa sama. Akibat tumbukan ini energi kinetik sistem berkurang $\eta$ = 1,0%. Tentukan besar dan arah kecepatan partikel 1 setelah tumbukan!*

***Jawab :*** Anggap kecepatan partikel-partikel ini setelah tumbukan adalah $v_1$ dan $v_2$.

Kekekalan momentum:

$$mv = mv_1 + mv_2$$

Kekekalan energi total:

Energi mula-mula = Energi akhir + Energi yang hilang

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2 + \eta(\tfrac{1}{2}mv^2)$$

dari kedua persamaan di atas kita peroleh,

$$2v_1^2 - 2vv_1 + \eta v^2 = 0$$

jadi,

$$v_1 = \frac{\left(1 \pm \sqrt{1 - 2\eta}\right)v}{2}$$

Disini, tanda positif sebelum akar kuadrat tidak diperbolehkan karena akan membuat $v_2$ negatif dan hal ini tidak mungkin.

Jadi,

$$v_1 = \frac{\left(1-\sqrt{1-2\eta}\right)v}{2}$$

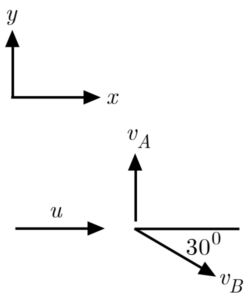
dan, jika $\eta \ll 1$, maka dengan menggunakan ekspansi binomial kita peroleh:

$$v_1 = {}^{\eta v}\!/_2 = 5 \text{ cm/s}$$

**Catatan**: Ekspansi binomial adalah sebagai berikut:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n\text{-}1}b + {}^1\!/_2\, n(n-1)a^{n\text{-}2}b^2 + ....$$

**1.93.** *Sebuah partikel A bermassa m menumbuk partikel B yang diam dan bermassa M. Partikel A kemudian menyimpang dengan sudut $^{\pi}\!/_2$, sedangkan partikel B menyimpang dengan sudut $\theta = 30^o$ terhadap gerakan awal partikel A. Berapa persen perubahan energi kinetik sistem setelah tumbukan jika $^M\!/_m = 5{,}0$?*




***Jawab:*** Anggap kecepatan awal partikel A sebelum tumbukan adalah $u$ dan kecepatan setelah tumbukan adalah $v_A$ dan $v_B$.

Kekekalan momentum:

Arah sumbu $x$:

$$mu = Mv_B \cos 30^{\circ}$$

Arah sumbu $y$:

$$mv_A - Mv_B \sin 30^{\circ} = 0$$

Energi kinetik awal:

$$E_k = {}^1\!/_2\, mu^2$$

Energi kinetik akhir:

$$E_k' = {}^1\!/_2\, mv_A^2 + {}^1\!/_2\, mv_B^2$$

Dari persamaan-persamaan di atas kita peroleh:

$$\frac{E_k'}{E_k} = \left(\frac{m}{M\cos 30^{\circ}}\right)^2$$

Selanjutnya kita akan peroleh:

$$\boxed{\frac{\Delta E_k}{E_k} = \left[\tan^2 30^{\circ} + \left(\frac{m}{M\cos 30^{\circ}}\right)^2 - 1\right]}$$

Dengan memasukkan angka-angkanya kita peroleh bahwa: $\boldsymbol{\Delta E_k} \approx \boxed{\textbf{-40\%}\ \boldsymbol{E_k}}$

**1.94.** *Dua partikel bermassa $m_1$ dan $m_2$ bergerak saling tegak lurus satu sama lain dengan kecepatan $v_1$ dan $v_2$. Hitung (dalam kerangka pusat massa):*

*(a) momentum setiap partikel!*

*(b) energi kinetik total!*

***Jawab:***

(a) Kecepatan pusat massa sistem adalah (analog dengan rumus koordinat pusat massa)

$$\vec{v}_{pm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Momentum partikel pertama dalam kerangka pusat massa sistem:

$$\vec{P}_{1(pm)} = m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_{pm}) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

Sedangkan partikel kedua memiliki momentum:

$$\vec{P}_{2(pm)} = m_2\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_{pm}\right) = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

Karena $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$, maka:

$$P_{1(pm)} = P_{2(pm)} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

(b) Energi kinetik partikel pertama dalam kerangka pusat massa sistem adalah:

$$E_{1(pm)} = \tfrac{1}{2}\, m_1\left(\vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)^2$$

Dengan cara yang sama,

$$E_{2(pm)} = \tfrac{1}{2}\,\frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)^2$$

Jadi, energi kinetik total pusat massa adalah:

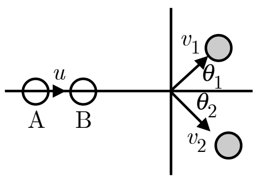
$$E_k = E_{1(pm)} + E_{2(pm)}.$$

$$\boxed{E_k = \tfrac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1^2 + v_2^2)}$$

(karena tegak lurus $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = 0$).

***1.95.*** *Sebuah partikel A bermassa $m_1$ menumbuk partikel B yang diam dan bermassa $m_2$ ($m_1 > m_2$) secara elastik. Tentukan sudut maksimum partikel A setelah tumbukan!*

***Jawab:***




Kekekalan momentum:

Arah sumbu $x$:

$$m_1 u = m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2$$

Arah sumbu $y$:

$$0 = m_1 v_1 \sin\theta_1 - m_2 v_2 \sin\theta_2$$

Kekekalan energi kinetik (tumbukan elastik):

$$\tfrac{1}{2}\, m_1 u^2 = \tfrac{1}{2}\, m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2 v_2^2$$

Dari persamaan-persamaan di atas kita akan peroleh,

$$u^2(m_1 m_2 - m_1^2) + u(2m_1^2 v_1 \cos \theta_1) - v_1^2(m_1 m_2 + m_1^2) = 0$$

Dengan rumus *abc* kita bisa menghitung *u*. Tetapi diskriminan (bilangan yang terdapat dalam akar kuadrat persamaan *abc*) harus lebih besar atau sama dengan nol.

Sehingga:

$$4 m_1^4 v_1^2 \cos^2 \theta_1 \geqslant 4\,(m_1^2 - m_1 m_2)(m_1^2 + m_1 m_2)\, v_1^2$$

atau,

$$\cos^2 \theta_1 \geqslant 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}$$

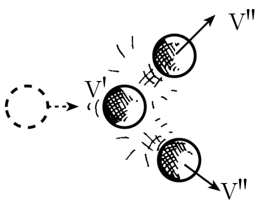
Jadi, agar nilai $\theta_1$ maksimum (atau nilai cos $\theta_1$ minimum)

$$\cos^2 \theta_m = 1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2$$

atau:

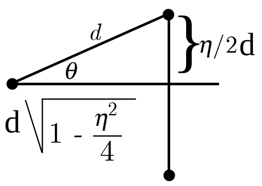
$$\boxed{\theta_m = \cos^{-1}\left[1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right]^{1/2}}$$

**1.96.** *Tiga bola identik A, B, dan C terletak pada suatu bidang datar licin. Bola A bergerak dengan kecepatan v dan menumbuk bola B dan C yang sedang diam secara bersamaan. Jarak pusat massa B dan C sebelum tumbukan adalah $\eta d$ dimana d adalah diameter bola. Tentukan kecepatan A setelah tumbukan. Pada nilai $\eta$ berapakah bola akan tertolak ke belakang; berhenti; terus bergerak?*




***Jawab:*** Anggap sudut ABC adalah $\theta$, maka:

$$\cos \theta = \frac{d\eta/2}{d} = \eta/2$$




Tinjau momentum arah sumbu mendatar. Anggap setelah tumbukan, kecepatan B dan C adalah $v''$ sedangkan kecepatan A adalah $v'$.

Kekekalan momentum:

$$mv = mv' + 2mv'' \cos \theta$$

$$v - v' = 2v'' \cos \theta$$

$$(v - v')^2 = 4v''^2 \cos \theta \quad \text{.............................} \quad (1)$$

Kekekalan energi kinetik: $\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv'^2 + \frac{1}{2}\, 2\, mv''^2$

$$v^2 - v'^2 = v''^2 \quad \text{.................................} \quad (2)$$

1 dan 2

$$\frac{\cancel{(v - v')}\,(v - v')}{\cancel{(v - v')}\,(v + v')} = 2\cos^2 \theta$$

$$v' = -v\left(\frac{2 - \eta^2}{6 - \eta^2}\right)$$

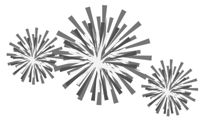
Ketika A tertolak ke belakang, $v'$ harus negatif.

Jadi, $\boxed{2 > \eta^2}$

atau, $\boxed{\eta < \sqrt{2}}$

Agar A berhenti, $v' = 0$

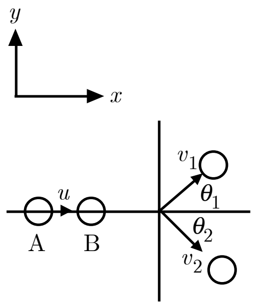
jadi, $\boxed{\eta = \sqrt{2}}$



Agar A bergerak ke ke depan, $v'$ adalah positif.

Jadi, $\boxed{\eta > \sqrt{2}}$

**1.97.** *Sebuah molekul menumbuk molekul sejenis yang sedang diam. Buktikan bahwa kedua molekul akan membentuk sudut 90º ketika tumbukannya lenting sempurna!*




***Jawab:***

Kekekalan momentum:

Arah sumbu $x$:

$$m_1 u = m_1 v_1 \cos \theta_1 + m_2 v_2 \cos \theta_2$$

Arah sumbu $y$:

$$0 = m_1 v_1 \sin \theta_1 - m_2 v_2 \sin \theta_2$$

Dari kedua persamaan di atas (dengan mengingat massa kedua molekul sama) maka kita peroleh:

$$u^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

Kekekalan energi kinetik:

$$\tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Dari persamaan-persamaan di atas kita akan peroleh persamaan berikut:

$$0 = 2v_1 v_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

atau,

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

dengan kata lain:

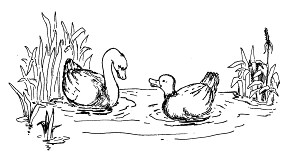
$$\boxed{\theta_1 + \theta_2 = \pi/2}$$

Bila tumbukan tidak lenting sempurna maka

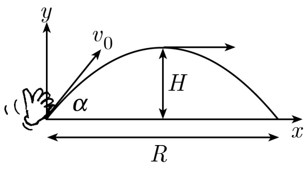
$$\cos(\theta_1 + \theta_2) \neq 0$$

atau,

$$\theta_1 + \theta_2 \neq \pi/2$$



**1.98.** *Sebuah bola bermassa m dilemparkan dengan sudut elevasi $\alpha$ dan dengan kecepatan awal $v_0$. Hitung besar momentum sudut terhadap titik awal pada titik tertinggi lintasan bila $m$ = 130 gram, $\alpha = 45°$, dan $v_0$ = 25 m/s! Abaikan hambatan udara.*




***Jawab:***

Pada titik tertinggi: $v = v_x = v_0 \cos \alpha$ dan $v_y = 0$.

Dengan rumus $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ dan $v_y = v_{0y} - gt$ serta persamaan di atas kita akan peroleh tinggi titik tertinggi adalah:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

vektor momentum

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

atau

$$\vec{P} = (mv_0 \cos \alpha)\,\vec{i}$$

Vektor posisi dari titik tertinggi adalah:

$$\vec{r} = \left(\frac{R}{2}\right)\vec{i} + H\vec{j}$$

dimana $R$ adalah jangkauan proyektil.

Jadi, momentum sudut partikel terhadap titik asal, ketika partikel berada pada titik tertinggi adalah:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{P} \\ &= \left(R/2\,\vec{i} + H\vec{j}\right) \times (mv_0 \cos \alpha)\,\vec{i} \\ &= -Hmv_0 \cos \alpha\,\vec{k} \end{aligned}$$

atau

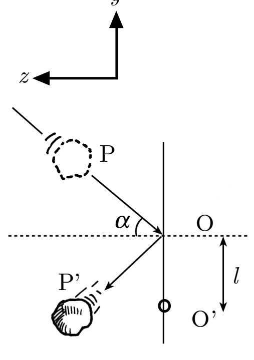
$$\boxed{\vec{L} = -\left(\frac{mv_0^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{2g}\right)\vec{k}}$$

$$L = 37 \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

***1.99.*** *Sebuah benda A bermassa m meluncur pada permukaan datar licin dengan kecepatan v. Benda ini menumbuk dinding di titik O secara elastik dengan sudut datang α (terhadap garis normal). Tentukan:*

*(a) titik-titik terhadap mana momentum sudut benda konstan!*

*(b) besar perubahan vektor momentum sudut **L** relatif terhadap titik O' yang terletak di dalam bidang gerak (pada sumbu vertikal) dan berjarak l dari titik O!*




***Jawab:***

(a) Gunakan rumus $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ Anda dapat membuktikan bahwa momentum sudut terhadap titik-titik pada garis normal adalah sama besar (konstan).

(b) Besar momentum sudut awal:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{P}|$$

atau, $L = -mv_0 l \cos \alpha$

Tanda negatif menunjukkan bahwa momentum sudut awal mempunyai arah sumbu $z$ negatif.

Momentum sudut akhir:

$$L' = |\vec{r} \times \vec{P}| = mv_0 l \cos \alpha$$

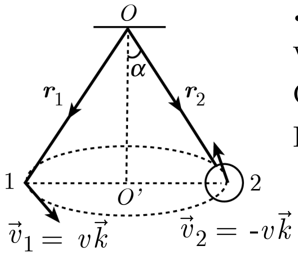
Perubahan momentum sudut:

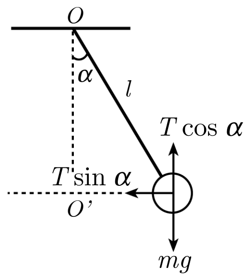
$$\Delta L = mv_0 l \cos \alpha - (-mv_0 l \cos \alpha)$$

atau,

$$\boxed{\Delta L = 2mv_0 l \cos \alpha}$$

**1.100.** *Sebuah bola kecil bermassa m digantung dengan benang yang panjangnya l pada titik O di suatu langit-langit. Bola bergerak dalam suatu lingkaran mendatar dengan kecepatan sudut konstan $\omega$. Relatif terhadap titik manakah momentum sudut bola $\vec{L}$ tetap konstan? Tentukan perubahan vektor momentum sudut bola relatif terhadap titik O dalam setengah putaran!*




***Jawab:*** Pada gambar di atas arah sumbu $x$, $y$ dan $z$ dinyatakan oleh vektor satuan $\vec{i}$, $\vec{j}$ ,dan $\vec{k}$.

Gaya-gaya yang bekerja ditunjukkan pada gambar di bawah ini:

Dalam keadaan seimbang:

$$T \cos \alpha = mg$$

$$T \sin \alpha = m\omega^2 l \sin \alpha$$

atau

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}$$

dan

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{g}{\omega^2 l}\right)^2}$$

Dari gambar terlihat bahwa $T \sin \theta$ mengimbangi gaya sentrifugal, dan selalu mengarah ke pusat lingkaran horizontal O'. Jelas juga terlihat bahwa titik O' adalah titik dimana resultan torsi adalah nol. Oleh karena itu, momentum sudut bola akan selalu konstan di titik O'.

Momentum sudut bola terhadap titik O ketika bola berada pada titik 1 adalah:

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1$$

Di titik 2:

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2$$

Vektor posisi titik 1 dan 2 terhadap titik O adalah:

$$\vec{r}_1 = l(-\vec{i} \sin \alpha - \vec{j} \cos \alpha)$$

$$\vec{r}_2 = l(\vec{i} \sin \alpha - \vec{j} \cos \alpha)$$

Sehingga kita peroleh:

$$\vec{L}_1 = mvl(-\vec{j} \sin \alpha + \vec{i} \cos \alpha)$$

$$\vec{L}_2 = -mvl(\vec{j} \sin \alpha + \vec{i} \cos \alpha)$$

Perubahan momentum sudut dalam setengah putaran adalah:

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

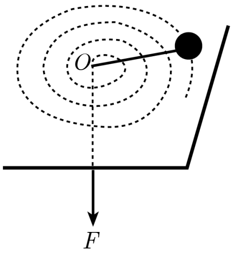
$$= mvl(-\vec{j}\ \sin\alpha - \vec{i}\ \cos\alpha + \vec{j}\ \sin\alpha - \vec{i}\ \cos\alpha)$$

Gunakan $v = \omega l \sin \alpha,$ kita akan peroleh besarnya perubahan momentum sudut ini adalah:

$$\Delta L = 2ml^2\omega \cos\alpha \sin\alpha$$

$$\Delta L = 2mg\, l/\omega \sqrt{1 - \left(\frac{g}{\omega^2 l}\right)^2}$$

**1.101.** *Sebuah benda bermassa m terikat pada suatu tali dalam suatu bidang datar. Ujung tali yang lain dimasukkan ke suatu lubang dalam bidang datar itu dan ditarik dengan kecepatan konstan. Hitung tegangan tali sebagai fungsi jarak r antara benda dan lubang bila pada $r = r_0$ kecepatan sudut tali $\omega_0$!*




***Jawab:*** Tegangan tali dan gaya $F$ arahnya ke pusat lintasan lingkatan (titik O) sehingga tidak akan memberikan momen gaya terhadap titik O. Karena momen gaya nol maka momentum sudut terhadap titik O kekal.

$$mr_0^2 \times \omega_0 = mr^2 \times \omega$$

atau,

$$v = \frac{r_0^2\omega_0}{r}$$

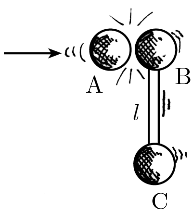
Tegangan pada tali memberikan gaya sentripetal, sehingga:

$$T = \frac{mv^2}{r}$$

Sehingga kita peroleh:

$$\boxed{T = \frac{mr_0^4\omega_0^2}{r^3}}$$

**1.102.** *Suatu bola bermassa m bergerak dengan kecepatan $v_0$. Bola ini menumbuk secara elastik suatu "dumb bell" (lihat gambar). Massa tiap bola pada dumb bell itu masing-masing $m/2$ dan jarak antara kedua bola bulatan adalah l. Hitung momentum sudut $\vec{L}$ dumb bell setelah tumbukan, terhadap titik pusat massa dumb bell!*




***Jawab:*** Tumbukan antara A dan B (lihat gambar):

Kekekalan momentum:

$$mv_0 = mv'_0 + (m/2)\, v_1$$

Tumbukan elastik (kekekalan energi kinetik):

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 = \tfrac{1}{2} m v'^2_0 + \tfrac{1}{2} (m/2)\, v_1^2$$

dimana $v_0$' dan $v_1$ adalah kecepatan bola A dan B setelah tumbukan.

Dari kedua persamaan di atas kita peroleh, $v_1 = {}^{4v_0}\!/_3$ . Jadi kecepatan pusat massa *dumb bell* adalah:

$$v_{pm} = \frac{\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{4v_0}{3}\right) + \left(\frac{m}{2}\right)0}{\left({}^{m}\!/_2 + {}^{m}\!/_2\right)} = \frac{2v_0}{3}$$

arah kecepatan pusat massa ini ke kanan.

Kecepatan bola B dan C relatif terhadap pusat massa ini adalah:

$$v_{1pm} = v_1 - v_{pm} = {}^{2v_0}\!/_3$$

$$v_{2pm} = v_2 - v_{pm} = {}^{-2v_0}\!/_3 \text{ (arah ke kiri).}$$

Momentum sudut *dumb bell* terhadap pusat massa adalah:

$$\vec{L}_{pm} = \vec{r}_{1pm} \times \left({}^{m}\!/_2\right) \vec{v}_{1pm} + \vec{r}_{2pm} \times \left({}^{m}\!/_2\right) \vec{v}_{2pm}$$

Dalam bentuk vektor:

$$\vec{r}_{1pm} = \left({}^{l}\!/_2\right) \vec{j}$$

$$\vec{r}_{2pm} = \left(-{}^{l}\!/_2\right) \vec{j}$$

$$\vec{v}_{1pm} = \left({}^{2v_0}\!/_3\right) \vec{i}$$

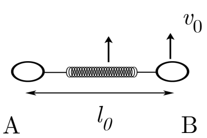
$$\vec{v}_{2pm} = \left(-{}^{2v_0}\!/_3\right) \vec{i}$$

Sehingga kita peroleh:

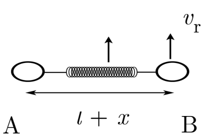
$$\boxed{\vec{L}_{pm} = -\left(\frac{mv_0 l}{3}\right)\vec{k}}$$

Besar momentum sudut ini adalah: $\left(\frac{mv_0 l}{3}\right)$.

**1.103.** *Dua benda masing-masing bermassa m, dihubungkan dengan sebuah pegas panjang l dan konstanta pegas k. Pada suatu ketika satu dari benda ini digerakan dalam arah mendatar dengan kecepatan $v_0$. Tentukan perubahan panjang pegas maksimum dalam peristiwa ini.*




awal




akhir

***Jawab:***

$$v_{pm} = \frac{mv_0 + 0.m}{m + m} = \frac{1}{2} v_0 \text{ (kecepatan pusat massa)}$$

Kecepatan B relatif terhadap pusat massa

$$v_{B\text{-}pm} = v_B - v_{pm}$$
$$= v_0 - \frac{1}{2} v_0 = \frac{1}{2} v_0$$

Kecepatan A relatif terhadap pusat massa

$$v_{A\text{-}pm} = v_A - v_{pm}$$
$$= 0 - \frac{1}{2} v_0 = -\frac{1}{2} v_0$$

Momentum sudut awal terhadap pusat massa

$$m_B v_{B\text{-}pm}\ \frac{1}{2}\, l_0 + m_{A\text{-}pm}(\frac{1}{2}\, l_0)$$
$$= m.(\frac{1}{2}\, v_0)\frac{1}{2}\, l_0 + m(-\frac{1}{2}\, v_0)(-\frac{1}{2}\, l_0)$$
$$= \frac{1}{2}\, m v_0 l_0$$

momentum akhir terhadap pusat massa

$$= \frac{1}{2}\, m v_r\ (l + x)$$

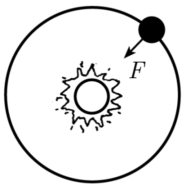
Kekekalan energi

$$\frac{1}{2}\, m\ (\frac{v_0}{2})^2 + \frac{1}{2}\, m\ (\frac{v_0}{2})^2 = \frac{1}{2}\, k\ x^2 + \frac{1}{2}\, m\ (\frac{v_r}{2})^2 + \frac{1}{2}\, m\ (\frac{v_r}{2})^2$$

Gunakan kekekalan momentum sudut dan kekekalan energi.

diperoleh $x = \dfrac{m v_0^2}{kl}$

**1.104.** *Sebuah planet bermassa $M = 1,65 \times 10^{30}$ kg, bergerak mengelilingi Matahari dengan kecepatan $v = 32,9$ km/s (dalam kerangka matahari). Hitung periode revolusi planet ini! Anggap lintasan planet melingkar.*




***Jawab:*** Gaya sentripetal yang menyebabkan planet bergerak melingkar adalah gaya gravitasi, sehingga dengan hukum Newton:

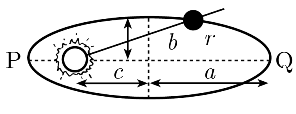
$$F = ma.$$
$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

Perioda planet (waktu 1 putaran) adalah:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi GM}{v^3} = \boxed{\textbf{225 hari}}$$

**1.105.** *Jika lintasan suatu planet berbentuk ellips, buktikan bahwa $T^2$ sebanding dengan $r^3$ (hukum Keppler III), dimana $T$ adalah perioda planet dan $r$ adalah jarak planet ke Matahari!*

***Jawab:***

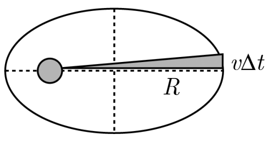



Luas daerah yang diarsir adalah (anggap luas segitiga)

$$\Delta A = 1/2\ |\vec{R} \times \vec{v}\ \Delta t|$$

Karena momentum sudut planet adalah $\vec{L} = \vec{R} \times m\vec{v}$ maka:

$$\Delta A/_{\Delta t} = \left(L/_{2m}\right)$$




Ini artinya laju luas yang disapu oleh gerakan planet adalah konstan (ingat momentum sudut planet konstan).

Jika $\Delta t = T$ adalah perioda, maka luas ellips A dapat ditulis:

$$A/_T = \left(L/_{2m}\right)$$

Karena luas ellips adalah A = $\pi ab$, maka

$$T = 2\pi m \, {}^{ab}\!/_{L}$$

Sekarang perhatikan keadaan planet di titik P (jarak Matahari ke titik P adalah $R_p$) dan titik Q (jarak matahari ke titik Q adalah $R_Q$). Kekekalan momentum sudut:

$$mR_p v_p = mR_Q v_Q = L$$

Kekekalan energi:

$$\tfrac{1}{2} m v_P^2 - \frac{GMm}{R_P} = \tfrac{1}{2} m v_Q^2 - \frac{GMm}{R_Q}$$

Dari kedua persamaan di atas kita peroleh,

$$\left(L^2/2m\right)(R_P + R_Q) = GMmR_P R_Q$$

Dalam ellips terdapat hubungan berikut:

$$R_P + R_Q = 2a$$

$$R_P = a(1 - e)$$

$$R_Q = a(1 + e)$$

$$b^2 = a^2 - a^2 e^2$$

dimana $e$ adalah eksentrisitas ellips.

Dari persamaan-persamaan di atas kita akan peroleh:

$$L^2 = \frac{GMm^2 b^2}{a}$$

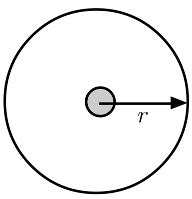
Selanjutnya kita akan peroleh:

$$\boxed{T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) a^3}$$

***1.106.*** *Periode revolusi Yupiter 12 kali periode revolusi Bumi. Anggap orbit planet melingkar, tentukan:*

*(a) perbandingan jarak Yupiter-Matahari dengan Bumi-Matahari!*

*(b) kecepatan dan percepatan planet Yupiter dalam kerangka matahari!*




***Jawab:***

(a) Anggap suatu planet berputar mengelilingi matahari dengan perioda $T$ dan jari-jari orbit $r$.

Dari hukum Newton ($F = ma$) kita peroleh:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

Karena $v = \left(2\pi/T\right) r$, maka $T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3$

Diketahui bahwa: $T_Y/T_B = 12$

Karena $T^2$ sebanding dengan $r^3$ maka

$$\frac{r_Y}{r_B} = \left(\frac{T_y}{T_B}\right)^{2/3}$$

atau $r_Y = 5{,}2\ r_B$

(b) Percepatan Yupiter mengitari Matahari dapat dicari dengan rumus Newton $F = ma$.

$$m_Y a = \frac{GMm_Y}{r_y^2}$$

atau

$$a_Y = \frac{GM}{r_Y^2} = \frac{GM}{(5{,}2r_B)^2} = \frac{1}{(5{,}2)^2}\ g$$

karena $a = v^2/r$ maka kecepatan planet Yupiter adalah:

$$\boxed{v_Y = \sqrt{\frac{GM}{5{,}2r_B}}}$$

**1.107.** *Sebuah planet bermassa M bergerak mengitari Matahari pada lintasan elips. Jika jarak minimum planet dari Matahari r dan jarak maksimum R. Tentukan periode revolusi planet mengitari Matahari!*

***Jawab:*** Soal ini mirip dengan soal sebelumnya. Silahkan Anda buktikan bahwa:

$$\boxed{T = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{GM_s}}\right)\left(\frac{R+r}{2}\right)^{3/2}}$$

**1.108.** *Sebuah benda kecil jatuh pada Matahari dari jarak yang sama dengan jari-jari lintasan Bumi. Kecepatan awal benda nol menurut matahari. Dengan menggunakan Hukum Kepler, tentukan berapa lama benda akan jatuh?*

***Jawab:*** Benda yang jatuh ke Matahari dapat dianggap sebagai suatu planet kecil yang lintasan ellipsnya sangat pipih dengan sumbu semi mayornya adalah $R/2$.

Menurut Hukum Keppler, $T^2$ sebanding dengan $r^3$, sehingga:

$$\left(\frac{T_{benda}}{T_{Bumi}}\right)^2 = \left(\frac{R/2}{R}\right)^3$$

Waktu jatuh adalah $t = T_{benda}/2$. Sehingga:

$$t = \frac{T}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} = \boxed{\textbf{65 hari}}$$

**1.109.** *Anggap kita membuat suatu model sistem tata surya dengan perbandingan skala $\eta$. Anggap kerapatan material planet dan matahari tidak berubah. Apakah perioda revolusi planet ikut berubah?*

***Jawab:*** Menurut hukum Keppler (lihat soal 105) perioda planet adalah:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)a^3 = \left(\frac{4\pi^2}{G}\left(\frac{3}{4\pi R^3\rho}\right)\right)a^3$$

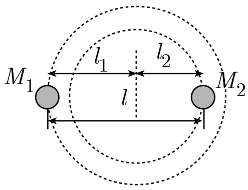
$$= \frac{3\pi a^3}{(G\rho R^3)}$$

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{a'}{a}\right)^{3/2}\left(\frac{R}{R'}\right)^{3/2} = \left(\frac{\eta a}{a}\right)^{3/2}\left(\frac{R}{\eta R}\right)^{3/2}$$

$$= \boxed{1}$$

dengan kata lain periodanya tidak berubah.

**1.110.** *Sebuah sistem bintang kembar terdiri dari dua bintang yang bergerak mengelilingi pusat massa sistem akibat gaya gravitasi. Hitung jarak antara kedua bintang dalam sistem ini jika massa total sistem M dan periode revolusi bintang T!*




***Jawab:*** Menurut rumus pusat massa:

$$M_2 l_2 = M_1 l_1$$

Dari gambar terlihat bahwa:

$$l_1 + l_2 = l$$

Dari kedua persamaan itu kita peroleh,

$$l_1 = \frac{M_2 l}{M_1 + M_2} = \frac{M_2 l}{M}$$

Gaya tarik antara kedua bintang:

$$F_1 = G\frac{M_1 M_2}{l^2}$$

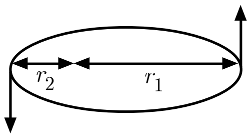
Karena gaya $F_1$ ini memberikan gaya sentripetal pada planet $M_1$, maka

$$M_1\omega^2 l_1 = \frac{GM_1M_2}{l^2}$$

Karena $\omega = 2\pi/T$, maka kita akan peroleh,

$$\boxed{l = \left[GM\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\right]^{1/3}}$$

**1.111.** *Sebuah planet bermassa m bergerak mengitari matahari bermassa M sepanjang lintasan elips sedemikian sehingga jarak maksimum dan minimum dari matahari adalah $r_1$ dan $r_2$. Hitung momentum sudut $\vec{L}$ planet relatif terhadap pusat Matahari!*




***Jawab:*** Kekekalan momentum sudut (perhatikan bahwa $r$ dan $v$ tegak lurus di titik terjauh dan di titik terdekat):

$$mv_1 r_1 = mv_2 r_2$$

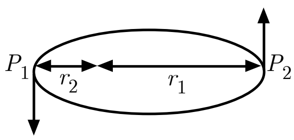
Kekekalan energi:

$$-G\frac{mM}{r_1} + \frac{1}{2} m v_1^2 = -\frac{GmM}{r_2} + \frac{1}{2} m v_2^2$$

Selesaikan kedua persamaan di atas, kita akan memperoleh:

$$\boxed{L_1 = mv_1 r_1 = m\sqrt{2GM\left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right)}}$$

***1.112.*** *Buktikan bahwa energi mekanis total planet bermassa m yang bergerak mengelilingi Matahari sepanjang lintasan elips tergantung hanya pada sumbu semi-mayor ellips a!*




***Jawab:*** Anggap jarak minimum dan maksimum planet terhadap matahari adalah $r_1$ dan $r_2$.

Dari hukum Newton $F = ma$ kita peroleh,

$$\frac{mv_1^2}{r_1} = \frac{GMm}{r_1^2}$$

Energi total partikel pada posisi $P_1$ adalah:

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{r_1}$$

Dengan cara yang sama, energi pada posisi $P_2$ adalah:

$$E = -\frac{GMm}{2r_2}$$

Dari persamaan diatas kita peroleh,

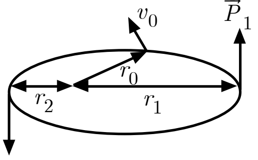
$$2E\,(r_1 + r_2) = -2GMm$$

$$E\,2a = -GMm$$

atau

$$\boxed{E = -\frac{GMm}{2a}}$$

***1.113.*** *Sebuah planet A bergerak sepanjang lintasan ellips mengelilingi Matahari. Ketika planet berada di titik O pada jarak $\vec{r}_0$ dari Matahari, kecepatannya $\vec{v}_0$. Sudut antara vektor $\vec{r}_0$ dan $\vec{v}_0$ adalah $\alpha$. Tentukan jarak maksimum dan minimum planet dari Matahari!*




***Jawab:*** Momentum sudut dititik terjauh:

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1$$

atau,

$$L_i = r_1 m v_1 \sin 90^{\circ} = mv_1 r_1$$

Momentum sudut di titik O:

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{P}_0$$

atau,

$$L_0 = r_0 m v_0 \sin \alpha$$

Kekekalan momentum sudut:

$$m v_1 r_1 = m v_0 r_0 \sin \alpha$$

Kekekalan energi:

$$-\frac{GMm}{r_0} + \tfrac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{GMm}{r_1} + \tfrac{1}{2} m v_1^2$$

Dari persamaan di atas kita peroleh,

$$-\frac{GMm}{r_0} + \tfrac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{GMm}{r_1} + \tfrac{1}{2} m \left(\frac{v_0 r_0 \sin \alpha}{r_1}\right)^2$$

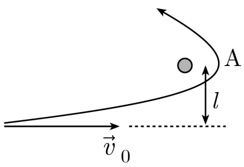
Persamaan ini adalah persamaan kuadratik dalam $r_1$ yang dapat diselesaikan dan menghasilkan (pakai rumus *abc*):

$$\boxed{r_1 = \frac{r_0}{2-\eta}\left[1 \pm \sqrt{1-(2-\eta)\eta \sin^2 \alpha}\right]}$$

dimana, $\eta = \dfrac{r_0 v_0^2}{GM}$.

Tanda negatif memberikan jarak minimum dan tanda positif memberikan jarak maksimum.

***1.114.*** *Sebuah benda kosmik A bergerak dari tempat jauh menuju Matahari dengan kecepatan $v_0$. Parameter impaknya adalah l (lihat gambar). Tentukan jarak minimum benda dari Matahari!*




***Jawab:*** Misalkan titik terdekat dari matahari adalah titik A. Disini arah kecepatan dan arah vektor jari-jari tegak lurus.

Kekekalan momentum sudut terhadap matahari:

$$m v_0 l = m v r_{min}$$

Kekekalan energi

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 = \tfrac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r_{\min}}$$

Dari kedua persamaan diatas kita akan peroleh,

$$v_0^2 r_{\min}^2 + 2GMr_{\min} - l^2 v_0^2 = 0$$

Selanjutnya, kita akan peroleh;

$$r_{\min} = \frac{-2GM \pm \sqrt{4G^2M^2 + 4v_0^4 l^2}}{2v_0^2}$$

(Di sini hanya tanda positif sebelum tanda akar kuadrat yang berlaku).

Jadi,

$$\boxed{r_{\min} = \frac{GM}{v_0^2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{v_0^2 l}{GM}\right)^2}-1\right]}$$

***1.115.*** *Satelit-satelit Bumi bergerak mengelilingi bumi dalam suatu bidang edar. Anggap jari-jari lintasan dari suatu satelit adalah r = 7.000 km dan satelit lain berjari-jari Δr = 70 km lebih kecil. Hitung selang waktu terkecil kedua satelit itu melewati garis AB secara bersama-sama!*

***Jawab:***

Dari hukum Newton: $F = ma = m\omega^2 r.$

Kita akan peroleh:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{GM}{r'^3}}$$

Bila satelit-satelit bergerak dalam arah yang sama, maka kecepatan sudut relatif;

$$\omega - \omega' = \sqrt{GM}\left(\frac{1}{r^{3/2}} - \frac{1}{r'^{3/2}}\right)$$

$$= \sqrt{GM}\left[\frac{1}{r^{3/2}} - \left(\frac{1}{r-\Delta r}\right)^{3/2}\right]$$

Dengan ekspansi binomial ($\Delta r \ll r$), kita peroleh:

$$\omega - \omega' = \sqrt{GM}\left[\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right)\frac{3\Delta r}{2r}\right]$$

Jadi, mereka akan melewati garis AB secara periodik dalam waktu:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega - \omega'}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\frac{r^{3/2}}{3\Delta r/2r} = 4{,}5 \textit{ hari}$$

Bila satelit-satelit bergerak dalam arah berlawanan, maka kecepatan sudut relatifnya adalah:

$$\omega + \omega' = \sqrt{GM}\left(\frac{1}{r^{3/2}} + \frac{1}{r'^{3/2}}\right)$$

$$= \sqrt{GM}\left[\frac{1}{r^{3/2}} + \left(\frac{1}{r-\Delta r}\right)^{3/2}\right]$$

$$= \sqrt{GM}\left[\frac{1}{r^{3/2}}\left(2 + \frac{3}{2}\frac{\Delta r}{r}\right)\right]$$

(dengan ekspansi binomial).

Jadi waktu yang diperlukan adalah:

$$\Delta t' = \frac{2\pi}{\omega + \omega'}$$

$$\boxed{\Delta t' = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \frac{r^{3/2}}{3\Delta r/_{2r} + 2} = 0{,}84 \ jam}$$

Hasil yang diminta adalah: **0,84 *jam***.

***1.116.*** *Hitung perbandingan dari percepatan-percepatan berikut:: $a_1$ percepatan akibat gaya gravitasi pada permukaan Bumi, $a_2$ percepatan sentripetal pada khatulistiwa Bumi, $a_3$ percepatan akibat gaya tarik Matahari pada benda di Bumi!*

***Jawab:*** Percepatan akibat gravitasi pada permukaan Bumi adalah:

$$a_1 = \frac{GM_B}{R_B^2}$$

Percepatan sentripetal di khatulistiwa adalah: $a_2 = \omega^2 R_B$.

Percepatan yang disebabkan oleh gaya gravitasi Matahari pada benda di permukaan Bumi adalah:

$$a_3 = \frac{GM_M}{R_{B-M}^2}$$

dimana, $R_{B\text{-}M}$ adalah jari-jari lintasan Bumi mengitari Matahari.

Jadi,

$$\boxed{a_1 : a_2 : a_3 = \frac{GM_B}{R_B^2} : \omega^2 R_B : \frac{GM_M}{R_{B-M}^2}}$$

$$= \mathbf{1 : 0{,}0034 : 0{,}0006}$$

***1.117.*** *Pada ketinggian berapa di atas permukaan Bumi (di daerah kutub) percepatan jatuh bebas akan berkurang satu persen? berkurang setengahnya?*

***Jawab:*** Percepatan gravitasi pada ketinggian $r = R + h$ (dimana $R$ adalah jari-jari bumi) adalah:

$$g' = \frac{GM}{r^2} = g(1 + h/_R)^{-2}$$

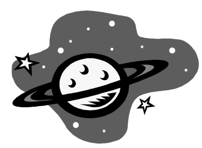
$g$ adalah percepatan gravitasi dipermukaan bumi ($r = R$).

Karena $g' = 0{,}99\ g$ maka kita peroleh:

$$h = 32\ Km\ (R = 6.400\ Km)$$

Jika $g' = g/_2$, kita peroleh:

$$\boxed{h = 2.650\ Km}$$



**1.118.** *Pada kutub Bumi sebuah benda dilemparkan ke atas dengan kecepatan $\vec{v}_0$. Hitung ketinggian yang dicapai benda jika jari-jari Bumi R dan percepatan jatuh bebas pada permukaan Bumi g! Abaikan hambatan udara.*

***Jawab:*** Di titik tertinggi kecepatan benda nol, sehingga dengan kekekalan energi kita peroleh:

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{(R+h)}$$

Selesaikan persamaan di atas, kita akan peroleh:

$$R/h = \frac{2GM}{Rv_0^2} - 1$$

Selanjutnya kita bisa tulis:

$$R/h = \frac{2gR}{v_0^2} - 1$$

Jadi; $\boxed{h = \frac{R}{\left(\frac{2gR}{v_0^2} - 1\right)}}$

**1.119.** *Hitung jari-jari lintasan suatu satelit geostasioner (satelit yang setiap saat berada di atas suatu titik yang sama pada permukaan bumi)! Hitung juga kecepatan dan percepatan satelit itu relatif terhadap Bumi!*

***Jawab:*** Pada satelit geostationer, kecepatan sudut satelit sama dengan kecepatan rotasi bumi. Periodanya adalah $T = 24$ *jam.* Anggap $r$ adalah jari-jari lintasan satelit dihitung dari pusat Bumi.

$$m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r^3 = gR^2$$

Karena $g = \dfrac{GM}{R^2}$ dimana $R$ adalah jari-jari Bumi.

Jadi,

$$r = \left(\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$r = \left(\frac{9,8\left(6,4\times10^6\right)^2 \times \left(8,64\times10^4\right)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$\boxed{r = 4,2 \times 10^7 \text{ m}}$$

Percepatan satelit adalah percepatan sentripetal:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} = \frac{gR^2}{r^2} = \boxed{0,23 \text{ m/s}^2}$$

Dari sini kita dapat menghitung kecepatan satelit, yaitu:

$$v = \sqrt{0,23\times r} = \boxed{3,1 \text{ km/s}}$$

**1.120.** *Suatu satelit bergerak melingkar di atas khatulistiwa dengan jari-jari $r = 2{,}00 \times 10^4$ km. Satelit ini bergerak dari barat ke timur dan kelihatan di atas titik tertentu pada khatulistiwa setiap $t = 11{,}6$ jam. Dari data-data ini hitunglah massa Bumi!*

***Jawab:*** Anggap $\omega_B$ adalah kecepatan sudut rotasi Bumi dan $\omega_{s\text{-}B}$ adalah kecepatan sudut satelit terhadap pengamat di Bumi. Jika $\omega_s$ adalah kecepatan sudut absolut, maka:

$$\omega_{s\text{-}B} = \omega_s - \omega_B$$

$$\omega_s = 2\pi/\tau + 2\pi/T$$

dimana, $\tau$ adalah periode satelit menurut pengamat di bumi dan $T$ adalah periode rotasi Bumi.

Hukum Newton 2:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r$$

atau,

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{G}\left(1/\tau + 1/T\right)^2$$

$$M = \frac{4\pi^2 \times 2^3 \times 10^{21}}{6,67 \times 10^{-11}}\left(\frac{1}{11,6 \times 3.600} + \frac{1}{24 \times 3.600}\right)^2$$

$$= \boxed{\mathbf{6{,}0 \times 10^{24}\ kg}}$$

**1.121.** *Sebuah satelit bergerak dari timur ke barat dalam lintasan melingkar di atas khatulistiwa dengan jari-jari lintasan $R = 1{,}0 \times 10^4$ km. Hitung kecepatan satelit dalam kerangka tetap terhadap Bumi!*

***Jawab*:** Bila $R$ adalah jari-jari lintasan satelit, maka dengan hukum Newton kita peroleh,

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$$

Bumi berputar dengan kecepatan sudut $\left(2\pi/T\right)$ dalam arah barat ke timur dan satelit berputar dalam arah timur ke barat. Jadi, kecepatan satelit terhadap permukaan Bumi adalah:

$$v_{rel} = \left(v + \left(2\pi/T\right)R\right) = \left(\sqrt{\frac{GM}{R}} + \frac{2\pi R}{T}\right)$$

$$v_{rel} = \boxed{7{,}0\ \text{km/s}}$$

**1.122.** *Sebuah satelit bergerak dibidang ekuator dekat dengan permukaan Bumi. Pada kasus A, satelit bergerak berlawanan dengan arah putaran Bumi sedangkan pada kasus B satelit berputar searah dengan arah putaran Bumi. Tentukan perbandingan energi kinetik satelit pada kedua kasus itu!*

***Jawab:*** Anggap $\omega$ kecepatan sudut absolut satelit.

Dengan hukum Newton kita peroleh,

$$m\omega^2 R = \frac{GMm}{R^2}$$

Jika satelit dianggap dekat sekali dengan bumi maka $R = R_{bumi}$, sehingga kita boleh tuliskan:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R_{bumi}}} = 1{,}24 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$$

Pada kasus B, kecepatan satelit relatif terhadap bumi adalah:

$$\begin{aligned}\omega_{SB} &= \omega - \omega_B \\ &= (124 \times 10^{-5}) - (7{,}3 \times 10^{-5}) \\ &= 116{,}7 \times 10^{-5} \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Untuk kasus A:

$$\begin{aligned}\omega'_{SB} &= \omega + \omega_B \\ &= 131{,}3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Perbandingan energi kinetik satelit:

$$\begin{aligned}\frac{E_B}{E_A} &= \frac{\frac{1}{2} m\omega'^2_{sB} r^2}{\frac{1}{2} m\omega^2_{sB} r^2} \\ &= \frac{(131{,}3)^2}{(116{,}7)^2} = \boxed{1{,}27}\end{aligned}$$

***1.123.*** *Hitung kecepatan lolos (escaped velocity) di Bulan! Bandingkan dengan kecepatan lolos di Bumi.*

***Jawab:*** Kecepatan lolos di Bulan merupakan kecepatan yang diberikan pada suatu benda di permukaan Bulan agar benda itu tidak kembali ke permukaan Bulan.

Anggap benda mencapai $r$ tak hingga dan kecepatan di tempat tak hingga adalah nol. Dengan hukum kekekalan energi kita peroleh,

$$\frac{1}{2} m v_{lolos}^2 - \frac{GM_{bulan} m}{R_{bulan}} = 0$$

Dari persamaan ini kita peroleh,

$$v_{lolos} = 2{,}37 \ km/s$$

Perbandingannya dengan kecepatan lolos di Bumi:

$$\boxed{\frac{v_{lolos}}{v'_{lolos}} = \sqrt{\frac{M_{bulan} R_{bumi}}{M_{bumi} R_{bulan}}}}$$

***1.124.*** *Sebuah pesawat luar angkasa mendekati Bulan sepanjang lintasan parabola yang hampir menyinggung permukaan Bulan. Pada saat pesawat mencapai jarak terdekat dengan Bulan, rem dihidupkan dalam selang waktu pendek. Selanjutnya pesawat mengorbit Bulan. Tentukan perubahan kecepatan pesawat luar angkasa selama proses pengereman ini!*

***Jawab:*** Anggap kecepatan di titik yang jauh adalah nol. Kekekalan energi:

$$-\frac{GM_b m}{R_b} + \tfrac{1}{2} mv^2 = 0$$

atau,

$$v = \sqrt{\frac{2GM_b}{R_b}}$$

Agar pesawat dapat mengorbit Bulan, pesawat harus mempunyai kecepatan tertentu (gunakan hukum Newton 2 pada orbit),

$$v' = \sqrt{\frac{GM_b}{R_b}}$$

Jadi, perubahan besar kecepatan pesawat adalah:

$$\Delta v = v' - v = \sqrt{\frac{GM_b}{R_b}} - \sqrt{\frac{2GM_b}{R_b}}$$

$$= \boxed{\textbf{-0,70 km/s}}$$

**1.125.** *Sebuah pesawat luar angkasa mengorbit dalam lintasan melingkar dekat permukaan Bumi. Berapa besar tambahan kecepatannya agar pesawat ini dapat mengalahkan gravitasi Bumi?*

***Jawab:*** Kecepatan orbit satelit dekat permukaan Bumi adalah:

$$v_0 = \sqrt{gR_B}$$

Untuk mengatasi gravitasi Bumi, pesawat harus mempunyai kecepatan lolos.

$$v_{lolos} = \sqrt{2gR_B}$$

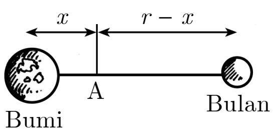
Jadi, tambahan kecepatan yang harus diberikan pada pesawat adalah:

$$\Delta v = v_B - v_0 = \sqrt{gR_B}\,(\sqrt{2} - 1)$$

$$= \boxed{3{,}28 \text{ km/s}}$$

**1.126.** *Pada jarak berapakah dari pusat Bulan, kuat medan gravitasi Bumi dan Bulan sama dengan nol? Anggap massa Bumi $\eta$ = 81 kali massa Bulan, dan jarak pusat Bumi-Bulan r = 60 kali jari-jari bumi R.*

***Jawab:*** Anggap A adalah titik dimana resultan medan gravitasi nol.




$$\frac{GM_B}{x^2} - \frac{GM_b}{(r-x)^2} = 0$$

Selesaikan persamaan di atas, kita akan peroleh;

$$x = \frac{r}{\left(1+\sqrt{\frac{M_b}{M_B}}\right)}$$

Karena $\frac{M_b}{M_B} = \eta$ dan $r = 60\ R$, maka

$$\boxed{x = \frac{60R}{1+\sqrt{1/81}}}$$

Jadi, dengan memasukkan nilai-nilai, kita memperoleh $x = 54\ R$.

**1.127.** *Berapa usaha minimum yang harus dilakukan untuk membawa suatu pesawat luar angkasa bermassa $m = 2{,}0 \times 10^3$ kg dari permukaan Bumi ke permukaan Bulan?*

***Jawab:*** Usaha minimum yang diperlukan adalah usaha yang dilakukan untuk melawan resultan gaya gravitasi Bumi dan Bulan. Usaha ini sama dengan beda energi potensial pesawat pada permukaan Bumi dan pada permukaan Bulan.

Energi potensial ketika pesawat dipermukaan Bumi adalah:

$$U_1 = -\frac{GM_Bm}{R_B} - \frac{GM_bm}{r}$$

dimana, $r$ adalah jari-jari orbit Bulan.

Energi potensial pesawat pada permukaan Bulan adalah:

$$U_2 = -\frac{GM_bm}{R_b} - \frac{GM_Bm}{r}$$

Jadi, perubahan energi potensial pesawat

$$\Delta U = U_1 - U_2$$

$$\Delta U = -\frac{Gm}{r}(M_b - M_B) - Gm\left(\frac{M_B}{R_B} - \frac{M_b}{R_b}\right)$$

($r$ sangat besar dibandingkan dengan $R_B$ dan $R_b$), atau

$$\Delta U = 1{,}3 \times 10^8 \text{ kJ}$$

**1.128.** *Tentukan kecepatan kosmik ketiga (third cosmic velocity) $v_3$, yaitu kecepatan minimum yang harus diberikan pada benda relatif terhadap permukaan Bumi untuk keluar dari sistem tata surya! Rotasi Bumi diabaikan.*

***Jawab:*** $v_3$ tidak sama dengan kecepatan lolos. Di sini gravitasi matahari juga pegang peranan.

Anggap $r$ adalah jarak Bumi-Matahari. Dengan hukum Newton kita peroleh kecepatan orbit bumi mengelilingi Matahari.

$$\frac{m_B v_{0M}^2}{r} = \frac{GMm_B}{r^2}$$

atau

$$v_{0M} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

dimana, $M$ adalah massa Matahari. $v_{0M}$ ini adalah kecepatan benda-benda yang mengorbit Matahari (artinya semua benda yang terletak pada jarak $r$ dari Matahari, akan bisa mengorbit Matahari jika mempunyai kecepatan $v_{0M}$).

Kecepatan lolos benda yang berada diorbit Bumi untuk keluar dari medan gravitasi Matahari adalah (lihat soal sebelumnya tentang kecepatan lolos).

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2}\, v_{0M}$$

$v_l$ ini adalah kecepatan yang harus diberikan pada benda diam pada jarak $r$ dari Matahari, agar mencapai titik tak hingga.

Jika benda yang sedang mengorbit Matahari (kecepatannya $v_{0M}$), hendak dilemparkan ke luar angkasa dan tak kembali lagi, maka kecepatan yang harus ditambahkan adalah:

$$v'_1 = \sqrt{2}\, v_{0M} - v_{0M}$$

Energi kinetik yang harus ditambahkan adalah $E_{kl} = \frac{1}{2} mv'_1$.

Ini artinya jika ada benda yang mempunyai energi $E_{kl}$ dan benda ini mengorbit Matahari pada jarak $r$, maka dapat dipastikan bahwa benda itu akan lepas atau lolos dari cengkraman gravitasi tata surya.

Jadi jika ada suatu benda kosmik sedang bergerak dengan kecepatan $v_3$ di orbit Bumi (dekat dengan permukaan Bumi), maka benda ini akan lolos dari Matahari jika energinya sama dengan $E_{kl}$ yaitu:

$$\frac{1}{2} m v_3^2 - \frac{G m_B m}{R_B} = \frac{1}{2} m(\sqrt{2} - 1)^2 v_{0M}^2$$

$$v_3^2 - 2 v_{0B}^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 v_{0M}^2$$

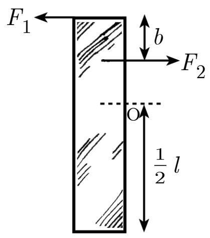
atau,

$$\boxed{v_3 = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 v_{0M}^2 + 2 v_{0B}^2}}$$

Dimana kita definisikan: $v_{0B} = \sqrt{\frac{G m_B}{R_B}}$

(**catatan:** $v_{0B}$ ini sebenarnya adalah kecepatan benda yang mengorbit Bumi).

***1.129.*** *Sebuah batang tipis AB bermassa $m$ = 1,0 kg mendapat gaya $F_1$ dan $F_2$ sehingga bergerak lurus dengan percepatan $a$ = 2,0 m/s$^2$. Jarak antara kedua titik tangkap gaya ini adalah $b$ = 20 cm. Jika $F_2$ = 5,0 N, tentukan panjang batang.*




***Jawab:*** Batang akan bergerak lurus jika **torsi** (atau **torka** = **torque**) atau **momen gaya** terhadap pusat massanya (titik O) nol. Jika torsi tidak nol maka benda akan berotasi.

$$\tau = I\alpha = 0$$

$$F_1\left(l/2\right) - F_2(l/2 - b) = 0$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa $F_2$ lebih besar daripada $F_1$. Gunakan hukum Newton,

$$F_2 - F_1 = ma$$

Selesaikan kedua persamaan di atas, kita akan peroleh:

$$\boxed{l = \frac{2F_2 b}{ma}} = 1{,}0 \text{ m}$$

**1.130.** *Sebuah gaya $F = A\vec{i} + B\vec{j}$ bekerja pada suatu titik dengan vektor posisi $r = a\vec{i} + b\vec{j}$, dimana a, b, A, B adalah konstanta-konstanta, dan $\vec{i}$, $\vec{j}$ adalah vektor satuan dari sumbu x dan y. Hitung momen gaya terhadap titikO (pusat koordinat)! Hitung juga panjang lengan momen!*

***Jawab:***

Momen gaya:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= (a\vec{i} + b\vec{j}) \times (A\vec{i} + B\vec{j}) \\ &= (aB - bA)\vec{k} \end{aligned}$$

Lengan momen adalah: $l = \tau/F$

$$\boxed{l = \frac{aB - bA}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

**1.131.** *Sebuah gaya $F_1 = A\vec{j}$ bekerja pada suatu titik dengan vektor posisi $r_1 = a\vec{i}$. Sebuah gaya lain $F_2 = B\vec{i}$ bekerja pada titik dengan vektor posisi $r_2 = b\vec{j}$. Tentukan lengan momen $\vec{l}$ dari resultan gaya relatif terhadap tiik O (pusat koordinat)!*

***Jawab:***

Gaya total:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_2 + \vec{F}_1 \\ \vec{F} &= B\vec{i} + A\vec{j} \end{aligned}$$

Besar gaya; $F = \sqrt{A^2 + B^2}$

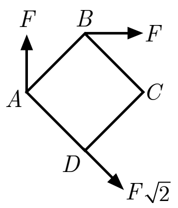
Momen gaya terhadap titik O:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \\ &= b\vec{j} \times B\vec{i} + a\vec{i} \times A\vec{j} \\ &= (aA - bB)\vec{k} \end{aligned}$$

Besar momen gaya: $\tau = aA - bB$

Lengan momen adalah: $l = \tau/F$

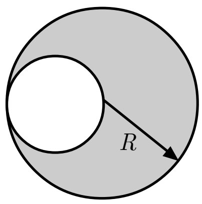
$$\boxed{l = \frac{aA - bB}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$




***1.132.*** *Tiga gaya bekerja pada suatu persegi empat seperti ditunjukkan pada gambar. Hitung besar dan arah gaya resultannya!*

***Jawab:*** Gaya pada titik sudut D dapat diurai yaitu menjadi: $F\vec{i} - F\vec{j}$. Karena gaya arah sumbu $y$ saling menghapus maka yang ada hanya gaya arah sumbu $x$. Besar gaya ini adalah $2F$. Jadi besar gaya resultan adalah $2F$ dengan arah pada arah sumbu $x$.

***1.133.*** *Sebuah cakram homogen berjari-jari $R$ = 20 cm mempunyai lubang seperti tampak pada gambar. Massa cakram berlubang ini $m$ = 7,3 kg. Hitung momen inersia cakram relatif terhadap sumbu yang melalui pusat massa cakram dan tegak lurus bidang cakram!*




***Jawab:*** Dari gambar terlihat bahwa lubang pada cakram berjari-jari $R/2$. Jika kita punya benda sebesar lubang itu, maka momen inersia benda terhadap pusat benda adalah:

$$I_1 = \tfrac{1}{2} m'\left(\tfrac{R}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{8} m'R^2$$

Momen inersia terhadap titik O (pusat lingkaran/cakram besar) dapat dihitung dengan teori sumbu sejajar:

$$I_O = I_1 + m'\left(\tfrac{R}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{8} m'R^2$$

Untuk momen inersia lubang kita beri *tanda negatif.*

Sehingga momen inersia cakram berlubang adalah:

$$I = \tfrac{1}{2} MR^2 - I_O = \tfrac{1}{2} MR^2 - \tfrac{3}{8} m'R^2$$

$M$ adalah massa cakram jika tidak berlubang.

Luas lubang $= \dfrac{\pi R^2}{4}$.

Luas bagian yang tak berlubang:

$$\pi R^2 - \frac{\pi R^2}{4} = \frac{3\pi R^2}{4}$$

Jadi kerapatan cakram berlubang adalah:

$$\sigma = \frac{massa\ sisa}{3\pi R^2/4} = \frac{m}{3\pi R^2/4} = \frac{4m}{3\pi R^2}$$

Massa cakram yang dipotong (yang ditempati lubang):

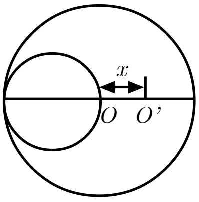
$$m' = \frac{\sigma \pi R^2}{4}$$

dan massa cakram jika tidak berlubang:

$$M = \sigma p R^2$$

Sehingga kita akan peroleh,

$$I = \frac{\sigma \pi R^4}{2}\left(1 - \tfrac{3}{16}\right) = \left(\tfrac{13}{24}\right) mR^2$$




Sekarang kita cari pusat massa sistem. Dengan rumus pusat massa, kita peroleh:

$$m' \, R/2 = mx$$

Dengan memasukkan nilai $m$ dan $m'$ kita peroleh, $x = R/6$.

Dengan demikian momen inersia terhadap titik O' adalah (gunakan teori sumbu sejajar).

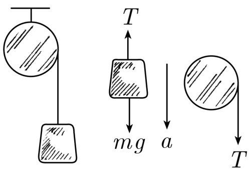
$$I = I_{O'} + m\left(R/6\right)^2$$

$$I_{O'} = \left(\tfrac{13}{24}\right) mR^2 - m\left(R/6\right)^2$$

$$= \left(\tfrac{37}{72}\right) mR^2$$

$$= \boxed{\mathbf{0{,}15\ kg.m^2}}$$

***1.134.*** *Sebuah benda bermassa m tergantung pada seutas tali ringan yang dihubungkan dengan sebuah selinder pejal bermassa M dan berjari-jari R. Hitung sebagai fungsi waktu besarnya kecepatan sudut selinder dan energi kinetik seluruh sistem!*




***Jawab:***

Benda $m$ (translasi):

$$mg - T = ma$$

Selinder (rotasi):

$$TR = I\alpha = \tfrac{1}{2} MR^2\alpha$$

Karena selinder tidak slip maka $a = \alpha$R.

Dari persamaan-persamaan di atas kita peroleh:

$$\alpha = \left(\frac{2mg}{2m + M}\right)\frac{1}{R}$$

Kecepatan sudut silinder setelah waktu $t$:

$$\omega = \alpha t = \frac{2mgt}{(2m + M)R}$$

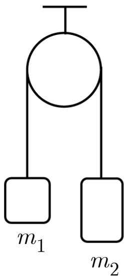
kecepatan linier massa $m$ adalah

$$v = at = \frac{2mgt}{2m + M}$$

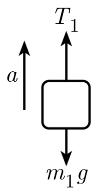
$$
\begin{aligned}
E_{k(total)} &= E_{k(selinder)} + E_{k(benda)} \\
&= \tfrac{1}{2} I\omega^2 + \tfrac{1}{2} mv^2 \\
&= \tfrac{1}{4} M\left[\frac{2mgt}{2m+M}\right]^2 + \tfrac{1}{2} m\left[\frac{2mgt}{2m+M}\right]^2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{E_k = \frac{mg^2t^2}{2\left(1+\dfrac{M}{2m}\right)}}$$

**1.135.** *Pada sistem dibawah ini anggap massa $m_2 > m_1$ dan massa katrol adalah m. Jari-jari katrol R. Hitung percepatan sudut katrol dan perbandingan tegangan $T_1/T_2$ !*

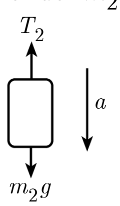



***Jawab*:** Benda $m_1$ (translasi):




$$T_1 - m_1 g = m_1 a$$

Benda $m_2$ (translasi):




$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$

*Selinder (rotasi)*

Disini karena selinder berotasi searah dengan jarum jam, maka

$$T_2 > T_1$$

$$(T_2 - T_1)R = I\alpha = \tfrac{1}{2} mR^2\alpha$$

Karena selinder tidak slip, maka $a = \alpha R$.

Dari persamaan-persamaan diatas kita akan peroleh:

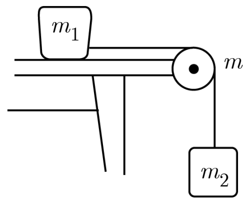
$$a = \frac{2(m_2 - m_1)g}{2(m_1 + m_2) + m}$$

$$T_1 = \frac{(4m_1m_2 + mm_1)g}{2(m_2 + m_1) + m}$$

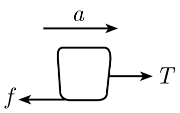
$$T_2 = \frac{(4m_1m_2 + m_2m)g}{2(m_2 + m_1) + m}$$

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{\left(1 + \dfrac{m}{4m_2}\right)}{\left(1 + \dfrac{m}{4m_1}\right)}}$$

**1.136.** *Dalam sistem dibawah ini, gesekan antara $m_1$ dan meja adalah $\mu$. Massa katrol m dan anggap katrol tidak slip. Abaikan massa tali, hitung usaha yang dilakukan oleh gaya gesek selama t detik pertama!*

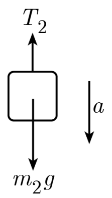



***Jawab:*** Benda $m_1$ (translasi)



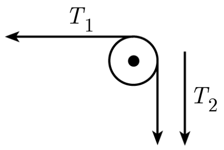

$$T_1 - \mu m_1 g = m_1 a$$

Benda $m_2$ (translasi)




$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$

Katrol (Rotasi)




$$(T_2 - T_1)R = I\alpha$$

$$I = \tfrac{1}{2} mR^2$$

Karena katrol tidak slip, maka $a = \alpha R$.

Dari persamaan-persamaan di atas kita peroleh:

$$a = \frac{2(m_2 - \mu m_1)g}{2(m_1 + m_2) + m}$$

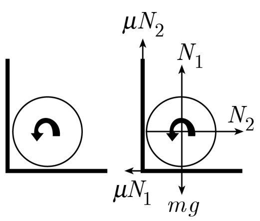
Jarak yang ditempuh dalam waktu $t$ adalah: $S = \tfrac{1}{2} at^2$.

Sehingga usaha yang dilakukan oleh gaya gesek adalah:

$$W = -fS = -\mu m_1 g S$$

$$\boxed{W = -\frac{\mu m_1 (m_2 - \mu m_1) g^2 t^2}{2(m_1 + m_2) + m}}$$

**1.137.** *Sebuah silinder homogen berjari-jari R diputar terhadap sumbunya dengan kecepatan sudut $\omega_0$. Dalam keadaan berputar selinder ini ditempatkan pada sudut suatu ruang. Koefisien gesekan antara dinding/ lantai ruang dengan selinder adalah m. Setelah berapa putaran selinder akan berhenti?*




***Jawab:*** Perhatikan gaya-gaya yang bekerja diatas. $N_1$ dan $N_2$ adalah reaksi lantai dan dinding.

Untuk menyelesaikan soal ini anda bisa memakai metode gaya. Yaitu dengan menghitung dulu perlambatan sudutnya lalu gunakan rumus $\omega(t)$ dan $\theta(t)$ untuk mendapatkan banyaknya putaran yang dialami selinder.

Cara lain adalah dengan metode energi. Disini usaha yang dilakukan selinder sama dengan perubahan energi kinetik selinder.

Energi kinetik awal silinder adalah

$$E_k = \tfrac{1}{2} I\omega_0^2 = \frac{\left(mR^2\omega_0^2\right)}{4}$$

Energi akhir: $E_k' = 0$ (selinder diam)

sehingga: $\Delta E_k = -\dfrac{\left(mR^2\omega_0^2\right)}{4}$

Karena selinder tidak bertranslasi maka percepatan linearnya nol.

$$N_1 + \mu N_2 = mg$$

$$N_2 = \mu N_1$$

Dari persamaan diatas, kita bisa menghitung $N_1$ dan $N_2$.

Jika selinder berputar $n$ kali sebelum berhenti, panjang lintasan yang ditempuh suatu titik pada permukaan selinder adalah $2\pi nR$.

Sehingga usaha yang dilakukan oleh gaya gesek adalah:

$$W = -(\mu N_1 + \mu N_2)2\pi nR$$

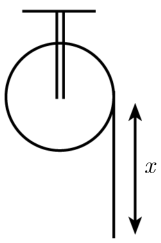
$$W = -\frac{2\pi nR\mu\,(1+\mu)\,mg}{1+\mu^2}$$

Karena $W = \Delta E_k$ maka kita akan peroleh:

$$\frac{mR^2\omega_0^2}{4} = \frac{2\pi nR\mu\,(1+\mu)\,mg}{1+\mu^2}$$

atau

$$\boxed{n = \frac{\omega_0^2 R\left(1+\mu^2\right)}{8\pi\mu g\,(1+\mu)}}$$




***138.*** *Sebuah silinder homogen berjari-jari R dan bermassa M dapat berputar bebas pada sumbunya. Seutas tali tipis yang panjangnya l dan massanya m dililitkan pada selinder itu. Hitung percepatan sudut selinder sebagai fungsi panjang bagian tali yang tergantung x!*

***Jawab:*** Jika panjang tali total adalah $l$ dan massa tali total adalah $m$, maka massa tali yang tergantung adalah $\left(\dfrac{m}{l}x\right)$.

Hukum Newton:

$$\frac{mx}{l}g - T = \frac{mx}{l}a$$

Panjang tali yang masih melilit di katrol adalah $(l - x)$ sehingga momen inersia selinder + tali yang melilit adalah:

$$I = \left[\tfrac{1}{2}MR^2 + \tfrac{m}{l}(l-x)R^2\right]$$

(catatan: momen inertia akibat tali dapat dianggap sebagai momen inersia cincin).

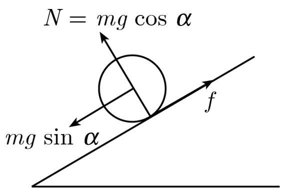
Katrol (berotasi): Hk. Newton rotasi

$$TR = I\alpha$$

Dari persamaan diatas kita peroleh:

$$\boxed{\alpha = \frac{2mgx}{lR(M+2m)}} \quad (a = R\alpha)$$

***1.139.*** *Suatu lingkaran homogen bermassa m dan berjari-jari R menggelinding tanpa slip ke bawah suatu bidang miring dengan sudut miring a. Tentukan:*
*(a) koefisien gesekan agar lingkaran menggelinding tanpa slip!*
*(b) energi kinetik sebagai fungsi t!*




***Jawab:***

(a) Gerak translasi:

$$mg\sin\alpha - f = ma$$

Gerak rotasi (penyebab gerak rotasi adalah gaya gesek):

$$fR = I\alpha$$

Momen inersia bola: $I = {}^{2}\!/_{5}\, mR^2$.

Syarat tidak slip (tidak tergelincir):

$$R\alpha = a$$

Karena $f \leqslant \mu mg\cos\theta$ maka kita peroleh

$$^{5}\!/_{2}\,\mu g\cos\alpha \geqslant g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$$
$$\mu \geqslant {}^{2}\!/_{7}\tan\alpha$$

(b) Dalam kasus menggelinding tanpa slip: $R\alpha = a$.

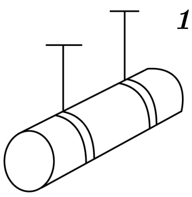
Energi kinetik terdiri dari energi kinetik translasi dan energi kinetik rotasi:

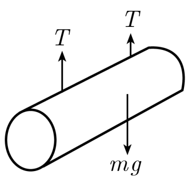
$$\begin{aligned} E_k &= {}^{1}\!/_{2}\, mv^2 + {}^{1}\!/_{2}\, I\omega^2 \\ &= {}^{1}\!/_{2}\, m(at)^2 + {}^{1}\!/_{2}\left({}^{2}\!/_{5}\right) mR^2(\alpha t)^2 \\ &= \left({}^{7}\!/_{10}\right) ma^2t^2 \end{aligned}$$

Selanjutnya kita peroleh:

$$\boxed{E_k = {}^{5}\!/_{14}\, mg^2t^2\sin^2\alpha}$$

***1.140.*** *Sebuah silinder homogen bermassa m dan jari-jari R diikat oleh dua utas tali yang tergulung. Hitung:*
*(a) tegangan setiap tali dan percepatan sudut silinder;*
*(b) daya sesaat akibat gravitasi sebagai fungsi waktu!*






***Jawab:***

(a) Gerak translasi selinder:

**Gerak rotasi:** $2T \bullet R = I\alpha$

$$mg - 2T = ma$$

Disini $a$ = percepatan pusat massa

Momen inersia: $I = \frac{1}{2} mR^2$

Karena selinder berotasi tanpa slip maka $a = R\alpha$.

Dari persamaan-persamaan diatas kita peroleh:

$$a = \frac{2g}{3}\ ;\ \alpha = \frac{2g}{3R};\ T = \frac{mg}{6}$$

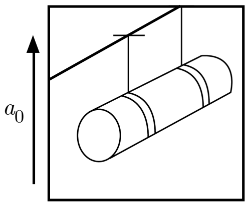
(b) Kecepatan silinder setelah waktu $t$ adalah

$$v = at = \frac{2gt}{3}$$

Daya sesaat: $P = Fv = mgv$ atau

$$\boxed{P = \frac{2}{3} mg^2 t}$$

**1.141.** *Sama seperti soal sebelumnya hanya saja sekarang silinder diletakkan dalam suatu lift yang bergerak ke atas dengan percepatan $a_0$. Tentukan percepatan silinder relatif terhadap lift dan gaya yang diberikan oleh silinder pada langit-langit (melalui tali)!*




***Jawab:*** Gerak translasi (untuk dapat menggunakan hukum Newton maka pengamat harus berada dalam kerangka diam atau inersial. Jadi percepatan diukur terhadap tanah).

$$2T - mg = ma$$

Gerak rotasi:

$$2T \bullet R = I\alpha$$

Karena lift bergerak keatas dengan percepatan $a_0$ maka percepatan selinder terhadap lift adalah: $-a' = a - a_0$.

Karena panjang tali yang terulur sama dengan jarak yang ditempuh selinder ke bawah maka $a' = R\alpha$.

Dari persamaan-persamaan di atas kita peroleh,

$$a' = \frac{2(g + a_0)}{3}$$

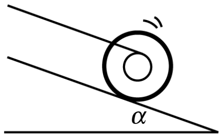
dan

$$2T = \frac{m(g + a_0)}{3}$$

Jadi gaya yang diberikan oleh tali pada langit-langit adalah:

$$\boxed{F = 2T = \frac{m(g + a_0)}{3}}$$

**1.142.** *Sebuah gelondong benang diletakkan pada bidang miring dengan sudut miring $\alpha$ (lihat gambar). Massa gelundung m dan momen inersianya (terhadap sumbunya) I. Jari-jari benang yang tergulung r. Hitung percepatan gelundung ini! (lantai licin)*




***Jawab:*** Gerak translasi:

$$mg \sin \alpha - T = ma$$

Gerak Rotasi:

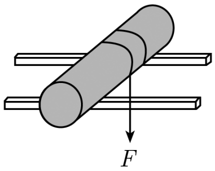
$$Tr = I\alpha$$

Selinder tidak slip: $\alpha r = a$.

Dari persamaan-persamaan di atas kita peroleh,

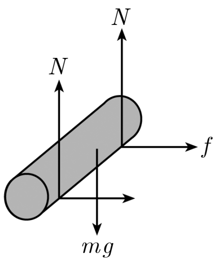
$$\boxed{a = \frac{g\sin\alpha}{1+\dfrac{I}{mr^2}}}$$

**1.143.** *Sebuah silinder homogen bermassa m diletakkan pada dua papan mendatar. Seutas tali diikat pada silinder. Ujung tali yang tergantung ditarik secara vertikal ke bawah dengan gaya konstan F. Hitung gaya F maksimum yang tidak menyebabkan silinder slip, bila koefisien gesekan antara silinder dan papan-papan μ!*




***Jawab:*** Gerak translasi balok pada sumbu $y$ (percepatan linear balok arah $y$, $a_y = 0$):

$$F + mg - 2N = 0$$




Arah mendatar:

$$2f = ma$$

dimana $f \leqslant \mu N$ adalah gaya gesek.

Gerak rotasi balok:

$$\tau = I\alpha$$
$$FR - 2fR = \tfrac{1}{2} mR^2\alpha$$

Gaya maksimum agar balok tidak slip harus memenuhi syarat $\alpha R = a$ dan $f = \mu N$.

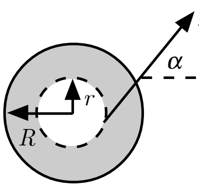
Dari persamaan-persamaan di atas kita akan peroleh:

$$F = \frac{3\mu mg}{2-3\mu}$$

dan

$$\boxed{a = \frac{2\mu g}{2-3\mu}}$$

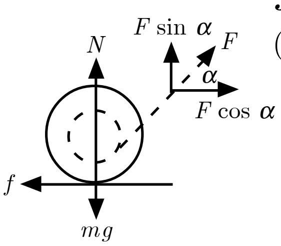
**1.144.** *Suatu gelendong benang massanya m, diam pada bidang datar kasar. Momen inersia gelendong terhadap sumbunya adalah $I = \gamma mR^2$, dimana γ adalah suatu bilangan, dan R jari-jari luar gelendong. Jari-jari tali yang tergulung adalah r. Gelendong kemudian ditarik oleh gaya konstan F yang arahnya membentuk sudut α dengan bidang datar. Tentukan:*




*(a) percepatan gelendong arah x;*

*(b) usaha yang dilakukan oleh gaya F selama t detik pertama!*

***Jawab:***




(a) Gerak translasi (arah $x$):

$$F\cos\alpha - f = ma \text{ (gerakan pusat massa)}$$

Gerak rotasi:

$$\tau = I\alpha$$
$$Rf - Fr = \gamma mR^2\alpha$$

Dari persamaan-persamaan di atas kita peroleh: ($a = \alpha R$)

$$\boxed{a = \frac{F\left(\cos\alpha - \dfrac{r}{R}\right)}{m(\gamma + 1)}}$$

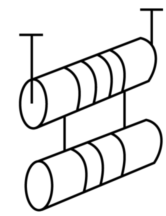
(b) Usaha yang dilakukan oleh gaya $F$ sama dengan perubahan energi kinetiknya (perhatikan bahwa gaya gesek dalam gerak rotasi tanpa slip tidak melakukan usaha).

$$\begin{aligned} W &= \tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2 \\ &= \tfrac{1}{2} mv^2(1 + \gamma) \\ &= \tfrac{1}{2} m(at)^2(1 + \gamma) \end{aligned}$$

atau

$$\boxed{W = \frac{F^2t^2\left(\cos\alpha - r/R\right)^2}{2m(\gamma + 1)}}$$

***1.145.*** *Pada sistem di bawah ini, massa masing-masing selinder homogen adalah m. Massa tali diabaikan. Hitung tegangan masing-masing tali! Anggap selinder dapat berotasi dengan mudah.*

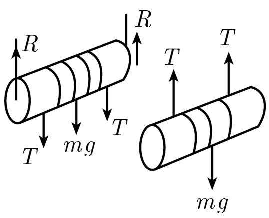


***Jawab:***

Selinder atas (keseimbangan)

$$2R = 2T + mg$$

$R$ adalah gaya reaksi penyangga dan $T$ adalah tegangan tali.




Selinder atas (rotasi): $2Tr = I\alpha$

Selinder bawah (translasi):

$$mg - 2T = ma$$

Selinder bawah (rotasi):

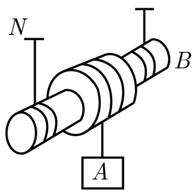
$$2Tr = I\alpha$$

Karena percepatan sudut selinder atas dan bawah masing-masing $\alpha$, maka percepatan pusat massa selinder bawah (bergerak ke bawah) $a = 2\alpha r$ (pikirkan mengapa begitu?).

Dari persamaan-persamaan diatas kita akan peroleh:

$$\boxed{T = \tfrac{1}{10}\, mg}$$

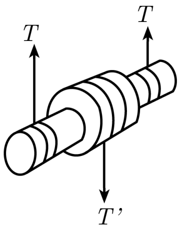
***1.146.*** *Dalam gambar di bawah, massa beban A dan katrol B masing-masing m dan M. Momen inersia katrol relatif terhadap sumbu katrol I dan jari-jari katrol R dan 2R. Abaikan massa tali, hitung percepatan benda A!*




***Jawab:***

Katrol (translasi):

$$Mg + T' - 2T = Ma$$




Katrol (rotasi):

$$2TR + T' \bullet 2R = I\alpha$$

Benda A (translasi):

$$mg - T' = ma'$$

Tali yang terikat pada selinder berjari-jari $R$ akan terulur dengan percepatan $a$ dan yang terikat pada selinder berjari-jari $2R$ akan terulur dengan percepatan $2\alpha R$.

Jadi percepatan pusat massa $A$ adalah:

$$a' = a + 2\alpha R = 3\alpha R$$

Percepatan pusat massa selinder: $a = R\alpha$.

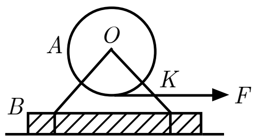
Dari persamaan-persamaan di atas kita akan peroleh:

$$\boxed{a' = \frac{3(M+3m)g}{\left(M+9m+\dfrac{I}{R^2}\right)}}$$

***1.147.*** *Suatu silinder pejal A yang homogen bermassa $m_1$ dapat berputar bebas di sekitar sumbunya. Selinder ini dihubungkan dengan bantalan B bermassa $m_2$ (lihat Gambar). Suatu gaya konstan mendatar F diberikan pada ujung tali yang melilit pada selinder. Abaikan gesekan antara bantalan dengan bidang datar. Tentukan:*

*(a) percepatan ujung tali K;*

*(b) energi kinetik sistem setelah t detik!*




***Jawab:***

(a) Anggap $x$ dan $x_{pm}$ adalah perpindahan titik $K$ dan pusat massa silinder $A$. Jika $\theta$ adalah sudut rotasi silinder maka,

$$x - x_{cm} = R\theta$$

Dengan demikian

$$a - a_{cm} = R\alpha$$

Disini, $a_{cm}$ adalah percepatan pusat massa silinder $A$, $a$ adalah percepatan titik $K$ dan $\alpha$ adalah percepatan sudut $A$.

Gerak translasi:

$$F = (m_1 + m_2)a_{cm}$$

Gerak rotasi selinder:

$$\tau = I\alpha$$

$$FR = \tfrac{1}{2} m_1 R^2 \alpha$$

Dari persamaan-persamaan di atas kita akan peroleh:

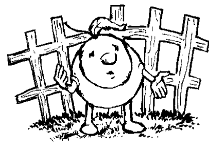
$$a = \frac{F(3m_1 + 2m_2)}{m_1(m_1 + m_2)}$$

(b) Usaha oleh gaya $F$ sama dengan perbedaan energi kinetik.

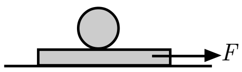
$$W = E_k - 0$$

$$F\left(\frac{at^2}{2}\right) = E_k$$

$$\boxed{E_k = \frac{F^2t^2\,(3m_1 + 2m_2)}{2m_1\,(m_1 + m_2)}}$$

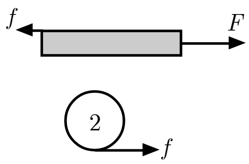


**1.148.** *Di atas suatu papan yang bermassa $m_1$ diletakkan suatu bola homogen bermassa $m_2$. Papan diletakkan pada lantai licin dan mendapat gaya mendatar konstan F. Berapa percepatan papan agar bola tidak slip (tidak tergelincir)?*




***Jawab:***

Papan (translasi) $F - f = m_1a_1$
dimana $f$ adalah gaya gesek.




Bola (translasi)

$$f = m_2a_2$$

Dimana $a_1$ dan $a_2$ adalah percepatan pusat massa papan dan bola (keduanya relatif terhadap tanah sebab hukum Newton harus mengambil acuan sistem yang diam).

Bola tidak akan tergelincir (tidak slip) jika percepatan pusat massa bola terhadap papan harus sama dengan percepatan tangensial bola $a_2 - a_1 = -\alpha r$ (mengapa? perhatikan tanda minus!).

Gerak rotasi Selinder:

$$\tau = I\alpha$$

$$fr = \left(\tfrac{2}{5}\right) m_2r^2\alpha$$

Dari persamaan-persamaan di atas kita peroleh:

$$a_1 = \frac{7F}{7m_1 + 2m_2}$$

dan

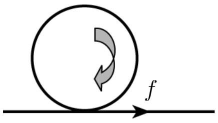
$$\boxed{a_2 = \frac{2F}{7m_1 + 2m_2}}$$

**1.149.** *Sebuah silinder pejal homogen mempunyai massa m dan jari-jari R. Ketika sedang berputar dengan kecepatan sudut $\omega_0$, selinder diletakkan ke lantai dan dilepas. Koefisien gesek antara selinder dan bidang datar $\mu$. Hitung:*

*(a) berapa lama silinder akan bergerak disertai slip?*

*(b) usaha total yang dilakukan oleh gaya gesekan!*

**Jawab:**




(a) Pada waktu selinder dijatuhkan ke lantai, akibat gaya gesekan, kecepatan sudut selinder akan berkurang.

$$\omega = \omega_0 - \alpha t$$

Gaya gesekan ini akan memberikan kecepatan linear (translasi) pada selinder sehingga selinder bergerak dengan kecepatan $v$.

$$v = at$$

Kejadian ini berlangsung terus hingga suatu saat selinder bergerak tanpa slip dimana berlaku.

$$v = \omega R$$

Percepatan selinder dihitung dari hukum Newton:

$$F = ma$$

$$\mu mg = ma$$

Percepatan sudut selinder dihitung dari rumus Newton untuk rotasi:

$$\tau = I\alpha$$

$$\mu mgR = \tfrac{1}{2} mR^2\alpha$$

Dengan menyelesaikan persamaan-persamaan di atas kita akan peroleh,

$$t = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}$$

dan

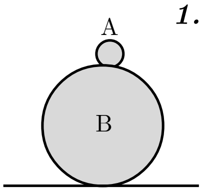
$$\omega = \frac{\omega_0}{3}$$

(b) Usaha oleh gaya gesekan sama dengan beda energi kinetik.

$$W = \tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2 - \tfrac{1}{2} I\omega_0^2$$

atau

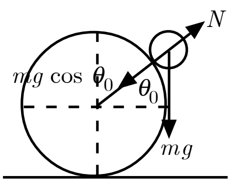
$$\boxed{W = -\tfrac{1}{6} mR^2 \omega_0^2}$$




**1.150.** *Sebuah bola A berjari-jari r menggelinding tanpa slip ke bawah dari puncak bola B yang berjari-jari R. Hitung kecepatan sudut bola A ketika meninggalkan bola B! Anggap kecepatan awal bola A nol.*

**Jawab:** Pusat massa bola A bergerak melingkar dengan jari-jari lintasan $(R + r)$.

Ketika bola A berada pada sudut $\theta$, maka dari hukum Newton $F = ma$ kita peroleh:




$$mg \cos \theta - N = \frac{mv^2}{R + r}$$

Ketika bola A mulai meninggalkan bola B maka $N = 0$ atau

$$mg \cos \theta = \frac{mv^2}{R + r}$$

$v$ adalah kecepatan bola A: $v = \omega r$.
$\omega$ adalah kecepatan sudut bola A terhadap sumbunya (sebenarnya $v$ dapat juga ditulis sebagai $v = {}^{d\theta}\!/_{dt}\,(R + r)$, tetapi hubungan ini tidak akan kita gunakan).

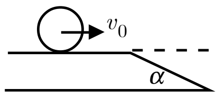
Hukum kekekalan energi,

$$mg(R + r) = mg(R + r)\cos\theta + \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

Dengan menggunakan $I = \tfrac{2}{5}mr^2$, dan menyelesaikan persamaan-persamaan di atas, kita akan peroleh:

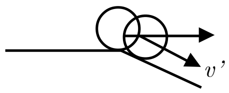
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{10g\,(R + r)}{17r^2}}}$$

***1.151.*** *Sebuah silinder pejal homogen berjari-jari R menggelinding tanpa slip pada suatu bidang datar yang dihubungkan dengan suatu bidang miring dengan sudut miring $\alpha$. Hitung kecepatan maksimum selinder agar selinder dapat menuju bidang miring tanpa melompat!*




***Jawab:*** Kekekalan energi:

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 + mgR = \tfrac{1}{2}mv'^2 + \tfrac{1}{2}I\omega'^2 + mgR\cos\alpha$$




Karena silinder menggelinding tanpa tergelincir, maka $v_0 = R\omega$ dan $v' = R\omega'$.

Sekarang perhatikan gerak melingkar selinder ketika sedang berbelok ke bidang miring.

$$mg\cos\alpha - N = \frac{mv'^2}{R}$$

Selinder tidak akan meloncat selama $N \geqslant 0$.

$$mg\cos\alpha \geqslant \frac{mv'^2}{R}$$

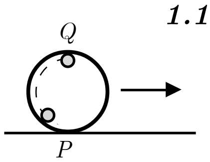
Selanjutnya dari persamaan-persamaan yang ada akan kita peroleh:

$$v_0 \leqslant \sqrt{\tfrac{1}{3}gR\,(7\cos\alpha - 4)}$$

atau

$$\boxed{v_{0max} = \sqrt{\tfrac{1}{3}gR\,(7\cos\alpha - 4)}}$$

***1.152.*** *Sebuah hoop (cincin) berjari-jari R menggelinding di atas bidang datar tanpa slip. Di dalam hoop itu terdapat sebuah benda A. Ketika benda A berada pada posisi terendah, kecepatan pusat massa hoop $v_0$. Berapakah nilai $v_0$ agar hoop tidak melompat-lompat? Anggap massa hoop sama dengan massa benda A.*




***Jawab:*** Pada posisi terendah (titik $P$) energi total sistem:

$$\begin{aligned} E_P &= (E_k + E_P)_{benda} + (E_k + E_P)_{hoop} \\ &= 0 + 0 + \tfrac{1}{2}mv_0^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_0^2 + mgR \end{aligned}$$

**Note:** energi kinetik benda A pada posisi ini adalah nol karena kecepatan di titik ini $v_0 - \omega_0 R = 0$ (hoop bergerak tanpa slip sehingga $v_0 = \omega_0 R$).

Di titik tertinggi (Q):

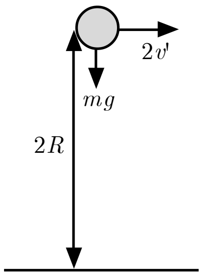
$$E_Q = (E_k + E_P)_{benda} + (E_k + E_P)_{hoop}$$

$$= \tfrac{1}{2} m v'^2_b + mg2R + \tfrac{1}{2} mv'^2 + \tfrac{1}{2} I\omega'^2 + mgR$$

dengan $v'_b = v' + R\omega' = 2\omega' R$ (kecepatan benda A di titik Q).

Selanjutnya karena $E_P = E_Q$, kita akan peroleh

$$v_0^2 = 3v'^2 + 2gR$$

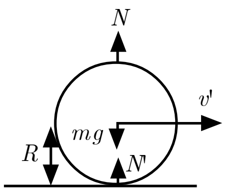



Di titik tertinggi: benda A dapat dianggap sesaat bergerak melingkar dengan jari-jari $2R$ dengan pusat lingkaran di titik $P$.

$$N + mg = m\frac{v_Q^2}{(2R)}$$

atau

$$N + mg = \frac{2mv'^2}{R}$$




Pada saat benda A di titik tertinggi, pusat massa hoop dapat dianggap bergerak melingkar dengan jari-jari $R$.

$$N + N' - mg = \frac{mv'^2}{R}$$

Hoop akan bergerak tanpa melompat jika $N' \geqslant 0$.

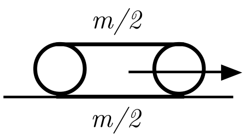
Dari persamaan-persamaan di atas kita akan peroleh:

$$v_0^2 - 2gR \leqslant 6gR$$

atau

$$\boxed{v_0 \leqslant \sqrt{8gR}}$$

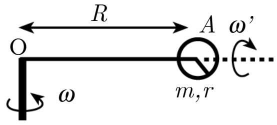
***1.153.*** *Tentukan energi kinetik ban berjalan suatu traktor bermassa m bila traktor bergerak dengan kecepatan v! Massa bagian atas m/2 dan massa bagian bawah m/2.*




***Jawab:*** Karena roda traktor berputar tanpa slip dengan kecepatan $v$, maka kecepatan bagian atas ban $2v$ dan kecepatan pada bagian bawah nol. Jadi energi kinetik ban adalah:

$$\boxed{E_k = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{m}{2}\right)(2v)^2 + 0 = mv^2}$$

***1.154.*** *Sebuah bola pejal bermassa m dan jari-jari r berotasi tanpa slip terhadap suatu sumbu mendatar OA. Dalam proses ini pusat massa bola bergerak dengan kecepatan v sepanjang suatu lingkaran berjari-jari R. Hitung energi kinetik bola!*




***Jawab:*** Disini ada dua gerak rotasi: gerak rotasi bola terhadap sumbu $OA$ (dengan kecepatan sudut $\omega'$) dan gerak rotasi pusat massa bola terhadap sumbu vertikal yang melalui $O$ (dengan kecepatan sudut $\omega$).

Karena bola berotasi tanpa slip maka $v = \omega R = \omega' r$.

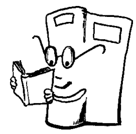
Energi kinetik Bola:

$$E_k = \tfrac{1}{2} I\omega^2 + \tfrac{1}{2} I'\omega'^2$$

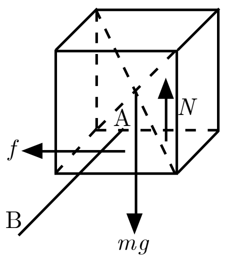
dalam hal ini: $I' = \tfrac{2}{5} mr^2$ dan $I = I' + mR^2$.

dari persamaan-persamaan di atas kita peroleh:

$$\boxed{E_k = \tfrac{7}{10} mv^2\left(1 + \frac{2r^2}{7R^2}\right)}$$



**1.155.** *Suatu kubus homogen bersisi a bergerak dalam bidang datar yang kasar. Balok kemudian berhenti setelah menempuh jarak tertentu. Koefisien gesekan balok dengan bidang datar $\mu$. Jelaskan hilangnya momentum sudut kubus relatif terhadap sumbu yang tegak lurus gerakan kubus dan terletak pada alas kubus! Tentukan jarak antara titik tangkap gaya gravitasi dan gaya Normal!*




***Jawab:*** Perhatikan gambar dibawah! Momentum sudut terhadap garis AB adalah $mv(\tfrac{1}{2}a)$. Karena $v$ berkurang akibat *gesekan* maka momentum sudut ini akan berkurang juga. Ketika $v$ menjadi 0 momentum sudutnya juga nol.

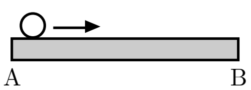
Selama gerakan, balok tidak terputar. Hal ini disebabkan karena torsi akibat gaya gesekan dikalahkan oleh torsi akibat gaya Normal (titik tangkap gaya normal tidak terletak segaris lagi dengan gaya gravitasi).

Jika jarak kedua titik tangkap ini adalah $x$, maka torsi terhadap titik O:

$$Nx - \left(\tfrac{1}{2}a\right)f$$

Karena $f = \mu N$, maka: $\boxed{x = \tfrac{1}{2}\mu a.}$

**1.156.** *Sebuah batang AB yang massanya M dan panjangnya l berputar bebas terhadap suatu sumbu vertikal yang melalui A dengan kecepatan sudut $\omega_0$ dalam bidang datar. Sebuah benda kecil bermassa m bergerak sepanjang batang dari titik A. Hitung kecepatan benda v' relatif terhadap batang pada saat benda mencapai ujung B!*




***Jawab:*** Karena tidak ada gaya luar yang bekerja pada sistem maka momentum sistem kekal.

Kekekalan momentum sudut:

$$I\omega_0 = (I + ml^2)\omega$$

Kekekalan energi:

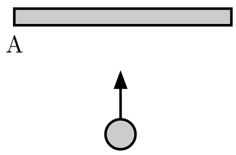
$$\tfrac{1}{2} I\omega_0^2 = \tfrac{1}{2}(I + ml^2)\omega^2 + \tfrac{1}{2} mv'^2$$

Momen inersia batang: $I = \tfrac{1}{3} Ml^2$

Dari persamaan-persamaan di atas kita peroleh:

$$\boxed{v' = \frac{\omega_0 l}{\sqrt{1 + \dfrac{3m}{M}}}}$$

**1.157.** *Sebuah pelat (keping) bujursangkar homogen dengan sisi l dan massa M dapat berputar bebas terhadap sumbu vertikal yang melalui salah satu sisi pelat. Sebuah bola kecil bermassa m bergerak dengan kecepatan v tegak lurus pelat membentur pusat massa pelat secara elastik. Hitung:*
*(a) kecepatan bola v' setelah tumbukan;*
*(b) gaya resultan yang diterima oleh pelat (arah horizontal)!*




***Jawab:***

(a) Kekekalan momentum sudut (terhadap sisi A):

$$mv\left(\tfrac{l}{2}\right) = mv'\left(\tfrac{l}{2}\right) + I\omega$$

Kekekalan energi kinetik (tumbukannya elastik)

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} mv'^2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

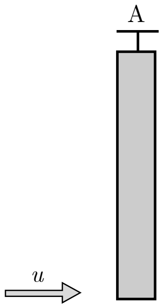
Dari persamaan di atas kita peroleh: ($I = \tfrac{1}{3} Ml^2$)

$$v' = \frac{3m - 4M}{(3m + 4M)} v$$

(b) Setelah tumbukan, pelat berputar dengan gaya sentripetal. Dan gaya inilah yang ditanyakan.

Jadi, gaya pada pelat: $F = \dfrac{M\omega^2 l}{2}$

atau, $$\boxed{F = \frac{8Mv^2}{l\left(1 + \dfrac{4M}{3m}\right)^2}}$$




***1.158.*** *Sebuah batang bermassa M dan panjangnya l digantungkan pada titik A. Sebutir peluru bermassa m menumbuk ujung batang bawah, sehingga batang berayun sebesar* $\boldsymbol{\theta}$. *Anggap* $m \ll M$, *tentukan:*

*(a) kecepatan peluru!*

*(b) perubahan momentum sistem; apa yang menyebabkan perubahan momentum ini?*

*(c) pada jarak berapakah dari titik A, peluru harus menumbuk batang agar momentum sistem kekal?*

***Jawab:***

(a) Anggap setelah tumbukan peluru masuk dalam batang dan sistem (batang + peluru) berayun dengan kecepatan sudut $\omega$.

Kekekalan momentum sudut:

$$mul = I\omega$$

dengan

$$I = \left(\frac{Ml^2}{3} + ml^2\right)$$

Ketika sistem mencapai sudut $\theta$, energi kinetik yang diterima peluru telah diubah menjadi energi potensial.

$$E_P = E_k$$

$$Mg\,{}^{l}\!/_{2}\,(1 - \cos\theta) + mgl(1 - \cos\theta) = {}^{1}\!/_{2}\, I\omega^2$$

Dari persamaan tersebut kita peroleh:

$$\left({}^{M}\!/_{2} + m\right) gl\left(1 - 1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = {}^{1}\!/_{2}\,\frac{m^2u^2}{\left({}^{M}\!/_{3} + m\right)}$$

$$u \approx {}^{M}\!/_{m}\, \sin\left({}^{\theta}\!/_{2}\right)\sqrt{{}^{2}\!/_{3}\, gl}$$

(b) Momentum linear sistem setelah tumbukan:

$$P' = \left({}^{M}\!/_{2} + m\right)\frac{mu}{{}^{M}\!/_{3} + m}$$

Karena $M \gg m$, maka

$$P' = \frac{3mu}{2}$$

Perubahan momentum linear sistem:

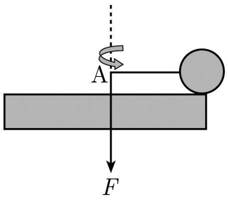
$$\Delta P = P' - P$$

atau

$$\Delta P = M\sin\left({}^{\theta}\!/_{2}\right)\sqrt{{}^{1}\!/_{6}\, gl}$$

(c) Untuk $\Delta P = 0$, maka peluru harus menumbuk batang pada jarak $x = {}^{2l}\!/_{3}$ (silahkan buktikan!)

**1.159.** *Sebuah cakram homogen bermassa M dan berjari-jari R terletak pada bidang datar. Sebuah benda massa m diletakkan di sisi cakram. Benda dihubungkan dengan seutas tali yang dilewatkan ke lubang A dipusat massa cakram. Sistem mula-mula berputar dengan kecepatan sudut $\omega_0$, kemudian gaya F diberikan pada ujung tali sehingga benda perlahan-lahan bergerak menuju pusat massa cakram. Abaikan gesekan, hitung:*
*(a) kecepatan sudut sistem ketika benda telah mencapai lubang A!*
*(b) usaha yang dilakukan F!*




***Jawab:***

(a) Gaya yang bekerja arahnya ke arah pusat (dalam hal ini tidak ada torsi yang bekerja), sehingga momentum sudut kekal:

$$(I_1 + I_2)\omega_0 = I_1\omega$$

dimana $I_1 = \frac{1}{2} MR^2$ dan $I_2 = mR^2$ menyatakan momen inersia cakram dan benda.

Dari persamaan di atas kita peroleh:

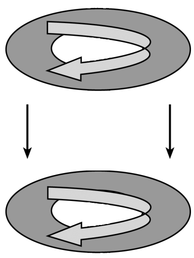
$$\boxed{\omega = \left(\frac{M + 2m}{M}\right)\omega_0}$$

(b) Usaha yang dilakukan oleh gaya $F$ sama dengan perubahan energi kinetik sistem:

$$W = \frac{1}{2} I_1\omega^2 - \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\,\omega_0^2$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\, m\omega_0^2\, R^2\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$$

**1.160.** *Dua cakram (disk) berotasi masing masing terhadap sumbunya. Momen inersia kedua disk relatif terhadap sumbu ini $I_1$ dan $I_2$, dan kecepatan sudutnya $\omega_1$ dan $\omega_2$. Disk 1 kemudian dijatuhkan ke disk 2, selanjutnya kedua disk berputar bersama (akibat gesekan). Tentukan:*
*(a) kecepatan sudut disk setelah stabil;*
*(b) usaha yang dilakukan oleh gaya gesek!*



***Jawab:***

(a) Momentum sudut kekal (karena tidak ada torsi luar)

$$(I_1 + I_2)\omega = I_1\omega_1 + I_2\omega_2$$

atau

$$\boxed{\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}}$$

(b) Usaha yang dilakukan gaya gesekan adalah perubahan energi kinetik. Jadi,

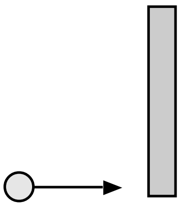
$$W_{gesekan} = E_k' - E_k$$

$$W_f = \tfrac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2 - \tfrac{1}{2} I_1 \omega_1^2 - \tfrac{1}{2} I_1 \omega_2^2$$

atau

$$\boxed{W_f = -\tfrac{1}{2}\,\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}(\omega_1 - \omega_2)^2}$$

**1.161.** *Pada sebuah bidang datar terdapat sebuah disk kecil (massa m) dan sebuah batang homogen panjang l (massa M). Disk bergerak tegak lurus batang dan menumbuk ujung batang secara elastik dengan kecepatan v. Tentukan kecepatan disk dan kecepatan sudut batang setelah tumbukan jika M = ηm! Berapa nilai η agar kecepatan disk setelah tumbukan sama dengan nol? Bagaimana agar disk berbalik arah!*



***Jawab:*** Dalam sistem ini karena batang bebas maka *momentum linear kekal* (bandingkan dengan soal 1.159 dimana batang dipaksa berputar).

$$mv = mv' + MV$$

dimana $v'$ dan $V$ adalah kecepatan bola dan batang setelah tumbukan.

Kekekalan momentum sudut (terhadap pusat massa):

$$mv\,\tfrac{l}{2} = mv'\,\tfrac{l}{2} + I\omega$$

dengan $I = \dfrac{Ml^2}{12}$

Kekekalan energi:

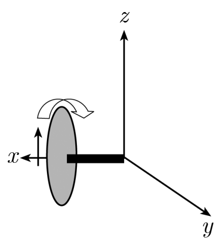
$$\tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} mv'^2 + \tfrac{1}{2} MV^2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

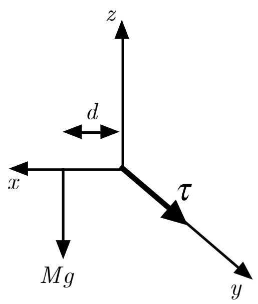
Dari persamaan–persamaan di atas kita peroleh:

$$\boxed{\begin{aligned} v' &= \frac{v(4-\eta)}{(4+\eta)} \\ \omega &= \frac{12v}{l(4+\eta)} \end{aligned}}$$

Disk akan berhenti bila: $v' = 0$,
dari persamaan di atas kita peroleh: $\eta = 4$.
Disk akan berbalik arahnya bila $v'$ negatif, yaitu, $\eta > 4$.

**1.162.** *Sebuah roda sepeda dihubungkan dengan sebuah as yang disambungkan dengan sebuah batang yang mudah berputar (lihat gambar). Roda sepeda kemudian diputar terhadap porosnya (sumbu x) dengan kecepatan sudut $\omega_0$. Terjadi suatu keanehan, yaitu roda sekarang berputar juga terhadap sumbu z. Hitung kecepatan sudut roda tersebut terhadap sumbu z! Anggap jari-jari roda R dan massa roda M. Momen inersia roda I. Jarak pusat massa roda dengan sumbu z adalah d.*





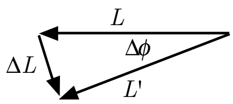

***Jawab:*** Gaya berat roda mengakibatkan torsi yang arahnya arah sumbu $y$ (gunakan aturan tangan kanan).

Adanya torsi ini mengakibatkan terjadi perubahan momentum sudut, semula arah momentum sudut pada sumbu $x$, sekarang menyimpang sedikit menuju arah sumbu $y$.

Besar perubahan momentum sudut (lihat gambar)

$$\Delta L = L\Delta\phi \text{ (anggap } L = L'\text{)}$$

Karena $\tau = {}^{\Delta L}\!/_{\Delta t}$ maka,

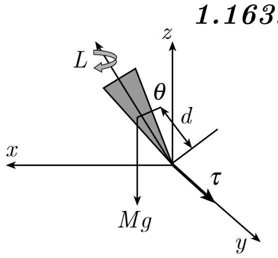



$$\tau = L\left({}^{\Delta\phi}\!/_{\Delta t}\right) = L\omega_P$$

$\omega_P$ adalah kecepatan sudut terhadap sumbu $z$. Jadi:

$$\omega_P = {}^{\tau}\!/_{L} = \frac{Mgd}{I\omega_0}$$

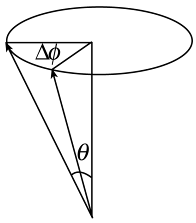
***Catatan:*** Gerak roda berotasi terhadap sumbu $z$ ini dinamakan gerak presesi. $\omega_P$ dinamakan kecepatan sudut presesi.




***1.163.*** *Sebuah gasing berputar terhadap suatu sumbu yang membentuk sudut $\theta$ dengan sumbu z. Hitung kecepatan sudut presesi gasing jika massa gasing M, jarak pusat massa gasing dengan pusat koordinat d kecepatan sudut gasing $\omega$ dan momen inersia gasing terhadap sumbunya I!*

***Jawab:***

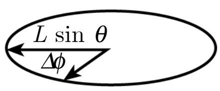
Gaya berat gasing menyebabkan timbulnya torsi pada arah sumbu $y$. Torsi ini akan menyebabkan terjadinya perubahan momentum sudut.




Besarnya perubahan momentum sudut adalah: $\Delta L = L \sin\theta\, \Delta\phi$.

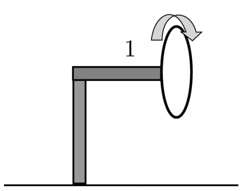
Karena torsi adalah laju perubahan momentum sudut maka:

$$\tau = \left({}^{\Delta L}\!/_{\Delta t}\right) = L \sin\theta\left({}^{\Delta\phi}\!/_{\Delta t}\right)$$




Jadi: $\boxed{\omega_P = \dfrac{\tau}{L\sin\theta} = \dfrac{Mgd}{I\omega}}$

***1.164.*** *Sebuah giroskop, berupa disk homogen berjari-jari R berada pada ujung batang yang panjangnya l yang dihubungkan dengan batang vertikal. Keseluruhan sistem diletakkan didalam sebuah lift yang sedang bergerak ke atas dengan percepatan konstan $a_0$. Giroskop berputar dengan kecepatan sudut $\omega$. Abaikan gesekan dan massa batang, hitung kecepatan sudut presesi dari giroskop ini!*




***Jawab:*** Soal ini mirip dengan soal no. 162 hanya saja percepatan gravitasinya diganti dari $g$ menjadi $g$ + $a_0$ (silahkan diskusikan, mengapa begitu)

Kecepatan sudut presesinya adalah:

$$\boxed{\omega_P = \frac{2\,(g + a_0)\,l}{\omega R^2}}$$

***note:*** gunakan $I = \frac{1}{2}MR^2$

***1.165.*** *Sebuah gasing dengan massa m dan momen inersia I (terhadap sumbunya) berotasi dengan kecepatan sudut* $\boldsymbol{\omega}$ *terhadap sumbunya. Ujung bawahnya diletakkan pada sebuah balok yang bergerak mendatar dengan percepatan* $a_0$*. Jarak antara ujung bawah ke pusat massa d. Hitung kecepatan sudut presesinya!*

***Jawab:*** Soal ini mirip dengan soal 1.163 hanya saja percepatan gravitasinya diganti dari $g$ menjadi $\left(g^2 + a_0^2\right)^{1/2}$ (silahkan diskusikan ini!).

Jadi kecepatan sudutnya adalah:

$$\boxed{\omega_P = \frac{m\left(g^2 + a_0^2\right)^{1/2} d}{I\omega}}$$