Pembinaan B-Bolt Fisika
Vektor

Z. Nayaka Athadiansyah
SMA Negeri 3 Malang
8 Februari 2023

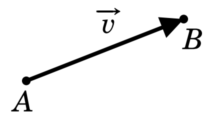
A Vektor dalam Ruang Euklidesan

Definisi A.1. Vektor adalah besaran yang memiliki besar (*magnitude*) dan arah (*direction*).

Representasi Vektor secara Analitis. Vektor dapat dituliskan sebagai daftar urutan bilangan yang ditulis berjajar vertikal, diapit oleh tanda kurung siku atau kurung lengkung, seperti

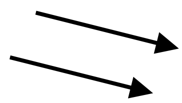
$$\begin{bmatrix} -5.2 \\ 31 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{pmatrix} -5.2 \\ 31 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Representasi Vektor secara Grafis. Kita juga bisa menggambarkan vektor sebagai panah. Kita bisa pandang vektor sebagai instruksi untuk pergi dari pangkal anak panah tersebut menuju ujungnya.[i] Panjang dari anak panah tersebut adalah besar dari vektor tersebut.



Vektor $\vec{v}$[ii] mempunyai titik pangkal di A dan titik ujung di B—vektor ini bisa disebut juga $\overrightarrow{AB}$. Besar vektor $\vec{v}$, dinotasikan sebagai $|\vec{v}|$, adalah panjang ruas garis $\overline{AB}$.

Kesamaan Dua Vektor. Ada satu hal yang bisa ditarik dari definisi vektor, yakni kedua vektor berikut



adalah vektor yang sama kendatipun titik pangkal dan titik ujungnya tidak berimpit, sebab *keduanya punya panjang dan arah yang sama*. Ini cukup masuk akal karena instruksi seperti, "Pergi sejauh 5 meter ke arah tenggara," tetap bermakna sama tak peduli di manapun instruksi tersebut diberikan.

Definisi A.2 (Vektor Nol)**.** Vektor nol, $\vec{0}$, adalah vektor yang titik pangkal dan titik ujungnya berimpit. Sebagai akibatnya, panjang $\vec{0}$ adalah nol dan vektor ini tidak mempunyai arah yang tentu.

●

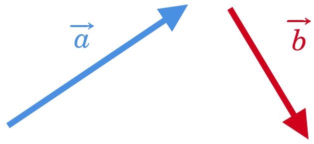
[i] Dalam bahasa Latin, 'vector' berarti *pembawa*. Idenya adalah jika kita membawa sesuatu dari titik pangkal vektor menuju titik ujungnya, maka perjalanan tersebut dapat direpresentasikan oleh ruas garis yang menghubungkan kedua titik tersebut.

[ii] Vektor dapat ditulis dengan tanda panah di atasnya ($\vec{v}$) ataupun dicetak tebal ($\mathbf{v}$).

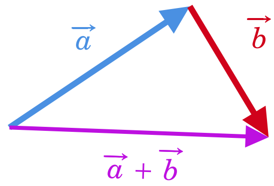
B Operasi Dasar pada Vektor

B.I Penjumlahan Dua Vektor

Definisi B.1. Misalkan dua buah vektor $\overrightarrow{a}$ dan $\overrightarrow{b}$.

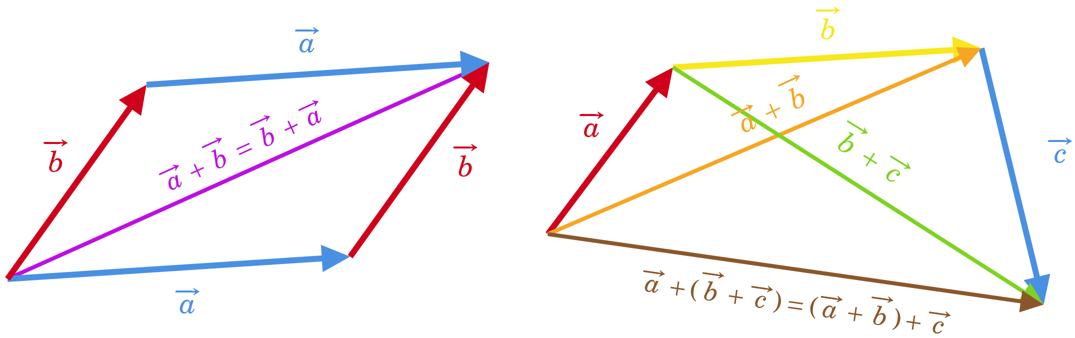


Penjumlahan antara keduanya, yakni $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$, dapat digambarkan dengan cara menggeser vektor $\overrightarrow{b}$ sedemikian sehingga titik pangkalnya berimpit dengan titik ujung $\overrightarrow{a}$, lalu menghubungkan titik pangkal $\overrightarrow{a}$ dengan titik ujung $\overrightarrow{b}$:



B.I.i Beberapa Sifat Penjumlahan Vektor

Coba perhatikan kedua konstruksi berikut:



Dari kedua gambar tersebut, kita mendapatkan dua sifat dalam penjumlahan vektor:

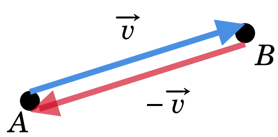
Proposisi B.2 (Sifat Komutatif)**.** $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$.
Urutan tidak memengaruhi hasil penjumlahan.

Proposisi B.3 (Sifat Asosiatif)**.** $\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\overrightarrow{c}$.
Tanda kurung dapat diabaikan.

Coba pikirkan: bagaimana jika kita menjumlahkan sebuah vektor dengan vektor nol? $\overrightarrow{0}$ tidak punya panjang dan arah tertentu sehingga menjumlahkan vektor apapun dengannya tidak akan mengubah apa-apa:

Proposisi B.4 (Unsur Identitas Penambahan)**.** $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}$

Perhatikan gambar berikut:



$\vec{v}$ atau $\overrightarrow{AB}$ adalah vektor dari titik A ke B. Kita mendefinisikan negatif dari vektor $\vec{v}$, yakni $-\vec{v}$, sebagai vektor yang panjangnya sama dengan $\vec{v}$ tetapi arahnya berkebalikan (dari B ke A, yakni $\overrightarrow{BA}$). Bagaimana jika kita menjumlahkan $\vec{v}$ dengan $-\vec{v}$?

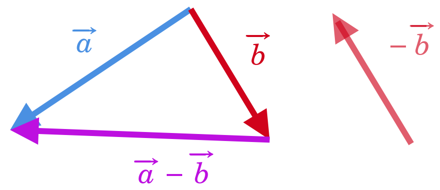
Dengan menggunakan definisi dari penjumlahan vektor, kita dapatkan bahwa titik pangkal maupun titik ujung vektor $\vec{v} + (-\vec{v})$ berada di A. Artinya, vektor tersebut adalah vektor nol. Jadi,

Proposisi B.5 (Unsur Invers Penjumlahan)**.** $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

B.II Pengurangan Dua Vektor

Hasil pengurangan dua vektor, $\vec{a} - \vec{b}$ misalnya, didefinisikan sebagai hasil penjumlahan $\vec{a}$ dengan $-\vec{b}$.

Definisi B.6. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

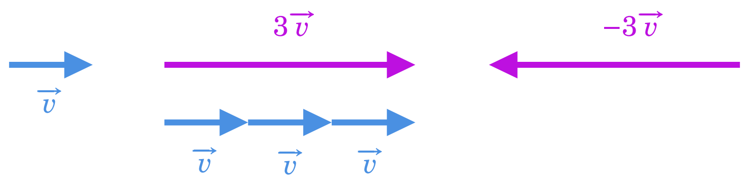


B.III Perkalian dengan Skalar

Jika sebuah vektor $\vec{v}$ dikalikan oleh bilangan real k (ditulis sebagai $k\vec{v}$), panjangnya akan menjadi $|k|$ kali lipat dari semula, atau:

$$|k\vec{v}| = |k||\vec{v}|.$$

Misalkan $k = 3$:



Untuk $k > 0$, arah $k\vec{v}$ sama dengan arah $\vec{v}$. Sebaliknya, jika $k < 0$ maka arah $k\vec{v}$ akan berkebalikan dengan arahnya semula. Jika $k = 0$, tentunya $k\vec{v}$ adalah vektor nol. Sekarang, bagaimana jika $k = \dfrac{1}{|\vec{v}|}$? Panjang vektor ini adalah

$$\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot |\vec{v}| = 1$$

Vektor semacam ini disebut **vektor satuan**. Vektor satuan ini mempunyai arah yang sama dengan $\vec{v}$ dan panjangnya adalah 1 satuan.

Definisi B.7. Vektor satuan adalah vektor yang panjangnya sama dengan 1. Vektor satuan yang searah dengan $\vec{v}$ dinotasikan sebagai $\hat{v}$ dan secara matematis dinyatakan sebagai

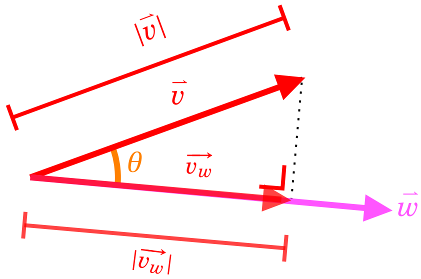
$$\hat{v} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}.$$

Vektor Segaris. Coba perhatikan baik-baik: vektor $k\vec{v}$ selalu berada pada garis yang sama dengan $\vec{v}$. Secara umum, jika dua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ segaris, maka berlaku hubungan

$$\vec{a} = k\vec{b}$$

untuk suatu bilangan real k.

Panjang Proyeksi/Proyeksi Skalar. Misalkan dua buah vektor $\vec{v}$ dan $\vec{w}$ dengan sudut apit θ. Andaikata datang sinar cahaya tegak lurus dari vektor $\vec{w}$, maka akan tercipta bayangan $\vec{v}$ pada $\vec{w}$.



Bayangan ini disebut **proyeksi** $\vec{v}$ pada $\vec{w}$, dinotasikan sebagai $\vec{v_w}$. Panjang dari proyeksinya, disebut **proyeksi skalar**, dapat kita tentukan dengan trigonometri sederhana:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v_w}|}{|\vec{v}\,|} \qquad \iff \qquad |\vec{v_w}| = |\vec{v}\,|\cos\theta.$$

B.IV Perkalian Titik (*Dot Product*)

Perhatikan gambar sebelumnya. Perkalian titik antara vektor $\vec{v}$ dan $\vec{w}$ didefinisikan sebagai

Definisi B.8. $\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v_w}||\vec{w}| = |\vec{v}\,||\vec{w}|\cos\theta$. Perkalian titik antara $\vec{v}$ dan $\vec{w}$ adalah hasil perkalian antara proyeksi skalar $\vec{v}$ pada $\vec{w}$ dengan panjang $\vec{w}$.

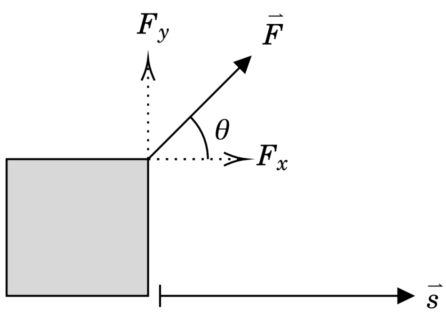
Perkalian titik menghasilkan suatu bilangan (skalar) sehingga juga disebut *perkalian skalar*. Operasi ini mendeskripsikan seberapa 'sama' dua buah vektor dalam hal arah. Makin searah dua vektor, makin besar hasil perkalian titiknya.

B.IV.i Makna Fisis di balik Perkalian Titik

Salah satu contoh perkalian titik dalam fisika adalah usaha. Misalkan sebuah benda diberi gaya F sehingga berpindah sejauh s, dengan sudut apit antara keduanya adalah θ, maka usaha yang diberikan didefinisikan sebagai

$$\vec{W} = \vec{F}\cdot\vec{s}$$

Perhatikan gambar berikut:



Sebuah balok ditarik oleh gaya $\vec{F}$ yang membentuk sudut θ terhadap sumbu horizontal. Perpindahan balok tersebut dinyatakan oleh vektor $\vec{s}$. Tentunya gaya $\vec{F}$ dapat kita uraikan menjadi komponen-x (F_x) dan komponen-y-nya (F_y). Kira-kira mana komponen gaya yang menyebabkan perpindahan balok? Tentunya kita bisa menalar bahwa F_x 'lah yang menyebabkan balok bergerak—mendorong balok ke bawah tidak akan membuat baloknya bergeser ke samping secara ajaib.
Dari SMP, kita mengetahui bahwa usaha adalah hasil kali antara gaya dengan perpindahan. Dalam konteks balok tadi, gaya yang dikalikan dengan perpindahan adalah komponen gaya yang searah dengan perpindahan saja, sehingga

$$
\begin{aligned}
W &= F_x \cdot |\vec{s}\,| \\
&= |\vec{F}\,|\cos\theta|\vec{s}\,| \\
&= |\vec{F}\,||\vec{s}\,|\cos\theta \\
&= \vec{F} \cdot \vec{s}\,.
\end{aligned}
$$

B.IV.ii Beberapa Sifat Perkalian Titik

Proposisi B.9 (Sifat Komutatif)**.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Bukti.

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}\,||\vec{b}\,|\cos\theta \\
&= |\vec{b}\,||\vec{a}\,|\cos\theta \\
&= \vec{b} \cdot \vec{a}
\end{aligned}
$$

□

Proposisi B.10 (Perkalian Titik dengan Vektor Nol)**.** $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$

Bukti.

$$
\begin{aligned}
\vec{0} \cdot \vec{a} &= \underbrace{|\vec{0}\,|}_{=0}|\vec{a}\,|\cos\theta \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

Proposisi B.11 (Perkalian Titik dengan Diri Sendiri)**.** $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}\,|^2$

Bukti.

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{a} &= |\vec{a}\,||\vec{a}\,|\cos\underbrace{\theta}_{=0} \\
&= |\vec{a}\,|^2
\end{aligned}
$$

□

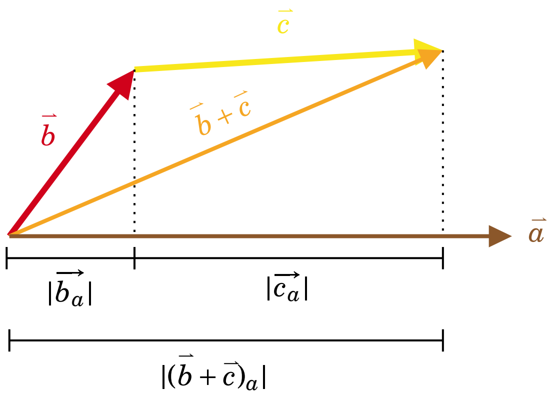
Proposisi B.12 (Sifat Asosiatif terhadap Perkalian dengan Skalar)**.** *Untuk sembarang bilangan real k,* $k(\vec{a} \cdot \vec{b}\,) = (k\vec{a}\,) \cdot \vec{b}\,$.

Bukti.

$$
\begin{aligned}
k(\vec{a} \cdot \vec{b}\,) &= k|\vec{a}\,||\vec{b}\,|\cos\theta \\
&= |k\vec{a}\,||\vec{b}\,|\cos\theta \\
&= (k\vec{a}\,) \cdot \vec{b}
\end{aligned}
$$

□

Proposisi B.13 (Sifat Distributif terhadap Penjumlahan Vektor)**.** $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}\,) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}\,$.



Bukti.

Berdasarkan gambar di atas, dapat kita simpulkan bahwa $|\overrightarrow{b_a}| + |\overrightarrow{c_a}| = |(\vec{b} + \vec{c})_a|$. Akibatnya,

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= |\vec{a}||(\vec{b} + \vec{c})_a| \\ &= |\vec{a}|(|\overrightarrow{b_a}| + |\vec{c}_a|) \\ &= |\vec{a}||\overrightarrow{b_a}| + |\vec{a}||\overrightarrow{c_a}| \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}\end{aligned}$$

□

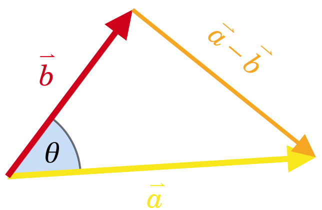
Proposisi B.14 (Perkalian Titik antara Vektor Saling Tegak Lurus). *Untuk $\vec{a} \neq \vec{0}$ dan $\vec{b} \neq \vec{0}$, berlaku $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ jika dan hanya jika $\vec{a} \perp \vec{b}$.*

Bukti. Jika $\vec{a} \perp \vec{b}$, maka besar sudut apitnya adalah 90° sedangkan $\cos 90° = 0$. Akibatnya,

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\underbrace{\cos\theta}_{=0} \\ &= 0\end{aligned}$$

□

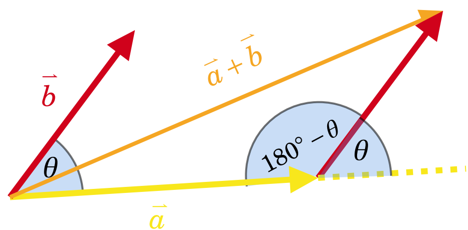
B.IV.iii Penurunan Aturan Cosinus



Perhatikan gambar di atas. Menggunakan sifat-sifat perkalian titik,

$$\begin{aligned}|\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \qquad \square\end{aligned}$$

B.IV.iv Panjang Vektor Resultan



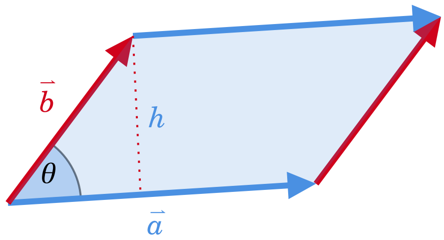
Perhatikan gambar di atas. Dengan menerapkan aturan cosinus pada segitiga yang dibentuk oleh $\vec{a}$, $\vec{b}$, dan $\overrightarrow{a+b}$,

$$\begin{aligned}|\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180° - \theta) \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \qquad \square\end{aligned}$$

Jadi, panjang vektor hasil penjumlahan $\vec{a} + \vec{b}$ adalah $\sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$.

B.V Perkalian Silang (*Cross Product*)

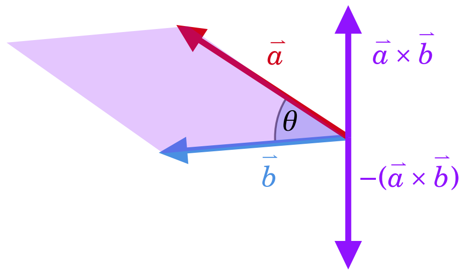
Definisi B.15. Misalkan dua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dengan sudut apit θ. Hasil dari perkalian silang antara keduanya didefinisikan sebuah **vektor** yang panjangnya setara dengan luas dari jajar genjang yang disusun atas dua pasang vektor tersebut,



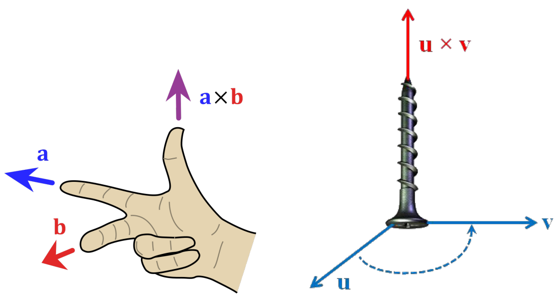
yakni

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

dan arahnya adalah tegak lurus terhadap bidang yang dibuat oleh $\vec{a}$ dan $\vec{b}$.[iii]



Karena menghasilkan sebuah vektor, perkalian silang juga disebut *perkalian vektor*. Perkalian silang bersifat *antikomutatif*, yakni jika urutannya dibalik maka tandanya juga akan terbalik $\left(\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})\right)$. Kita bisa menentukan arah vektor hasil perkalian silang dengan **aturan tangan kanan**:

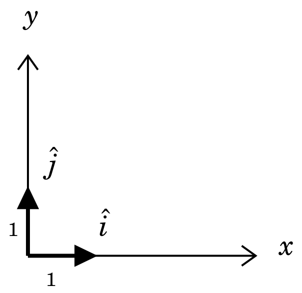


Pada gambar di sebelah kanan, jika sekrup diputar dari vektor $\vec{u}$ ke arah $\vec{v}$, maka sekrup akan bergerak ke arah $\vec{u} \times \vec{v}$. Sifat-sifat perkalian silang akan dibahas dalam bagian D.

[iii]Vektor satuan pada arah ini dinotasikan sebagai $\hat{n}$.

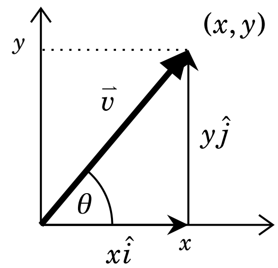
C Vektor pada Sistem Koordinat Kartesius

Basis Vektor. Dalam sistem koordinat Kartesius, kita pertama-tama mendefinisikan dua vektor satuan $\hat{\imath}$ dan $\hat{\jmath}$ sebagai berikut:



$\hat{\imath}$ adalah vektor satuan di arah sumbu-x, sedangkan $\hat{\jmath}$ adalah vektor satuan di arah sumbu-y. Kedua vektor ini dinamakan **vektor basis** dari sistem koordinat Kartesius 2-dimensi, karena *tiap vektor dalam sistem koordinat tersebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi dari $\hat{\imath}$ dan $\hat{\jmath}$.* Lebih tepatnya bagaimana? Coba perhatikan gambar berikut.

Bentuk Komponen.



Vektor $\vec{v}$ berpangkal di titik asal $(0,0)$ dan berujung di (x,y). Berdasarkan gambar, dapat kita perhatikan bahwa $\vec{v}$ pada dasarnya adalah hasil penjumlahan dari dua vektor, tepatnya:

$$\vec{v} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}.$$

Cara di atas adalah salah satu bentuk yang dipakai untuk menyatakan sebuah vektor yang disebut *bentuk komponen*. $x\hat{\imath}$ dan $y\hat{\jmath}$ secara berturut-turut disebut **komponen** $\vec{v}$ pada sumbu-x dan sumbu-y.[iv] Kita juga dapat menuliskannya dalam bentuk *vektor kolom* sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Arah Vektor. Arah dari vektor $\vec{v}$ didefinisikan sebagai sudut yang dibentuk oleh vektor tersebut dengan sumbu-x positif. Dari gambar, bisa kita lihat bahwa

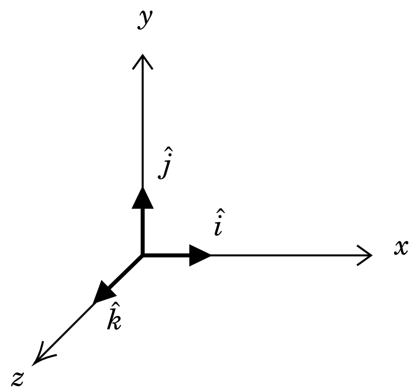
$$\tan\theta = \left(\frac{y}{x}\right), \text{ atau } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Panjang Vektor. Besar dari vektor $\vec{v}$ dapat kita cari dengan teorema Pythagoras. Dari gambar, dapat disimpulkan bahwa

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Tiga Dimensi. Dalam sistem koordinat 3-dimensi Kartesius, kita mempunyai sumbu baru, yakni sumbu-z. Vektor satuan pada arah sumbu-z adalah $\hat{k}$. Catat bahwa ketiga sumbu saling tegak lurus satu sama lain.

[iv] Komponen-x, komponen-y, dan komponen-z suatu vektor $\vec{v}$ juga biasa ditulis sebagai v_x, v_y, dan v_z.



Kita menuliskan vektor pada 3-dimensi dalam bentuk kolom dan bentuk komponen sebagai berikut:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}.$$

Panjang vektornya adalah

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

D Operasi Dasar untuk Vektor (2)

D.I Penjumlahan dan Pengurangan

Misalkan dua buah vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}.$$

Definisi D.1 (Penjumlahan dan Pengurangan Vektor)**.** Operasi penjumlahan dan pengurangan antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ didefinisikan sebagai

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}.$$

Dalam bentuk komponen, $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\hat{\imath} + (a_y \pm b_y)\hat{\jmath} + (a_z + \pm b_z)\hat{k}$.

D.II Perkalian dengan Skalar

Definisi D.2. Untuk sembarang bilangan real k,

$$k\vec{a} = k\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_x \\ ka_y \\ ka_z \end{pmatrix}.$$

Dalam bentuk komponen, $k\vec{a} = ka_x\hat{\imath} + ka_y\hat{\jmath} + ka_z\hat{k}$.

D.III Perkalian Titik (*Dot Product*)

Berdasarkan definisi perkalian titik, kita dapat mengetahui bahwa

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \quad \text{dan} \quad \hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\imath}\cdot\hat{k} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = 0.$$

Karena sudut apit antara $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, dan $\hat{k}$ semuanya 90° dan $\cos 90° = 0$ sedangkan sudut apit antara tiap vektor satuan dengan dirinya sendiri adalah 0° dan $\cos 0° = 1$. Atas dasar ini, kita dapat mendefinisikan perkalian titik untuk bentuk komponen:

Definisi D.3 (Perkalian Titik)**.** Jika

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}\\ \vec{b} &= b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}\end{aligned}$$

maka

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Catatan D.4. Definisi ini konsisten dengan sifat distributif perkalian titik terhadap penjumlahan,

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k})\\ &= a_xb_x(\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}) + a_xb_y(\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}) + a_xb_z(\hat{\imath}\cdot\hat{k}) + a_yb_x(\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath}) + a_yb_y(\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath})\\ &\quad + a_yb_z(\hat{\jmath}\cdot\hat{k}) + a_zb_x(\hat{k}\cdot\hat{\imath}) + a_zb_y(\hat{k}\cdot\hat{\jmath}) + a_zb_z(\hat{k}\cdot\hat{k})\\ &= a_xb_x\cdot 1 + a_xb_y\cdot 0 + a_xb_z\cdot 0 + a_yb_x\cdot 0 + a_yb_y\cdot 1\\ &\quad + a_yb_z\cdot 0 + a_zb_x\cdot 0 + a_zb_y\cdot 0 + a_zb_z\cdot 1\\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.\end{aligned}$$

D.IV Perkalian Silang (*Cross Product*)

Berdasarkan definisi perkalian silang, kita dapat mengetahui bahwa

$$\hat{\imath}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0},\quad \hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k} = -(\hat{\jmath}\times\hat{\imath}),\quad \hat{\jmath}\times\hat{k} = \hat{\imath} = -(\hat{k}\times\hat{\jmath}),\quad \text{dan}\quad \hat{k}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath} = -(\hat{\imath}\times\hat{k}).$$

Karena sudut apit antara tiap vektor satuan dengan dirinya sendiri adalah 0° dan $\sin 0^\circ = 0$ serta ketiga vektor satuan ($\hat{\imath}, \hat{\jmath}$, dan $\hat{k}$) saling tegak lurus satu sama lain. Atas dasar ini, kita dapat mendefinisikan perkalian silang untuk bentuk komponen:

Definisi D.5 (Perkalian Silang)**.** Jika

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}\\ \vec{b} &= b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}\end{aligned}$$

maka

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\hat{\imath} + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{\jmath} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{k}.$$

atau

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_yb_z - a_zb_y\\ a_zb_x - a_xb_z\\ a_xb_y - a_yb_x\end{pmatrix}$$

Lebih eksak lagi, $\vec{a}\times\vec{b}$ didefinisikan sebagai

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ a_i & a_j & a_k\\ b_i & b_j & b_k\end{vmatrix}$$

Catatan D.6. Definisi ini konsisten dengan sifat distributif perkalian silang terhadap penjumlahan, [v]

[v] dibahas di subbagian setelah ini

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) \\
&= a_x b_x(\hat{i} \times \hat{i}) + a_x b_y(\hat{i} \times \hat{j}) + a_x b_z(\hat{i} \times \hat{k}) + a_y b_x(\hat{j} \times \hat{i}) + a_y b_y(\hat{j} \times \hat{j}) \\
&\quad + a_y b_z(\hat{j} \times \hat{k}) + a_z b_x(\hat{k} \times \hat{i}) + a_z b_y(\hat{k} \times \hat{j}) + a_z b_z(\hat{k} \times \hat{k}) \\
&= a_x b_x \overrightarrow{0} + a_x b_y \hat{k} - a_x b_z \hat{j} - a_y b_x \hat{k} + a_y b_y \overrightarrow{0} \\
&\quad + a_y b_z \hat{i} + a_z b_x \hat{j} - a_z b_y \hat{i} + a_z b_z \overrightarrow{0} \\
&= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}.
\end{aligned}
$$

D.IV.i Beberapa Sifat Perkalian Silang

Proposisi D.7 (Sifat Antikomutatif)**.** $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} = -(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$.

Bukti.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} &= \begin{pmatrix} b_y a_z - b_z a_y \\ b_z a_x - b_x a_z \\ b_x a_y - b_y a_x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(a_y b_z - a_z b_y) \\ -(a_z b_x - a_x b_z) \\ -(a_x b_y - a_y b_x) \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \\
&= -(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})
\end{aligned}
$$

□

Proposisi D.8 (Sifat Distributif terhadap Penjumlahan)**.** $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c})$.

Bukti.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} b_x + c_x \\ b_y + c_y \\ b_z + c_z \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} a_y(b_z + c_z) - a_z(b_y + c_y) \\ a_z(b_x + c_x) - a_x(b_z + c_z) \\ a_x(b_y + c_y) - a_y(b_x + c_x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_y b_z + a_y c_z - a_z b_y - a_z c_y \\ a_z b_x + a_z c_x - a_x b_z - a_x c_z \\ a_x b_y + a_x c_y - a_y b_x - a_y c_x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y + a_y c_z - a_z c_y \\ a_z b_x - a_x b_z + a_z c_x - a_x c_z \\ a_x b_y - a_y b_x + a_x c_y - a_y c_x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_y c_z - a_z c_y \\ a_z c_x - a_x c_z \\ a_x c_y - a_y c_x \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}
$$

$$= (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}) \qquad \square$$

D.V Perkalian Tripel (*Triple Product*)

Perkalian tripel adalah ketika kita menggunakan operasi perkalian tiga kali (kombinasi antara perkalian titik dan perkalian silang). Ada dua macam perkalian tripel, yakni perkalian tripel skalar dan perkalian tripel vektor. Pembuktian sifat-sifat operasi ini dapat dilihat di proofwiki.org.[vi] [vii]

D.V.i Perkalian Tripel Skalar

Definisi D.9. Perkalian tripel skalar didefinisikan sebagai

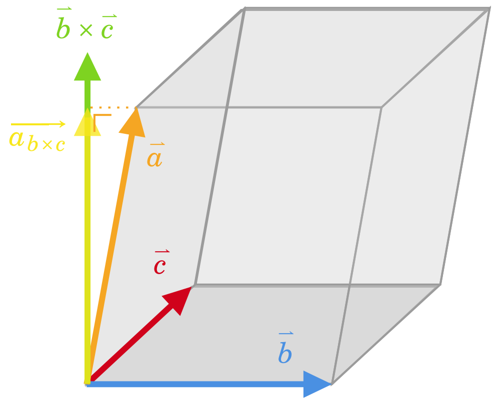
$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Proposisi D.10 (Ekspresi Ekivalen untuk Perkalian Tripel Skalar). *Penataan urutan jika digeser melingkar tidak akan mengubah hasil perkalian tripel skalar, yakni*

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

Proposisi D.11. *Besar perkalian tripel skalar sama dengan volume balok jajar genjang yang dibatasi ketiga vektor.*

Bukti. Perhatikan balok jajar genjang berikut:



Secara definisi, $|\vec{b} \times \vec{c}|$ adalah luas jajar genjang yang diapit oleh kedua vektor tersebut yang pada dasarnya adalah alas dari balok jajar genjang. Lalu, $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = |a_{b\times c}||b \times c|$ sedangkan $a_{b\times c}$ adalah proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b} \times \vec{c}$ yang pada dasarnya adalah tinggi dari balok tersebut. Jadi, $|\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)|$ adalah volume dari balok tersebut. $\square$

D.V.ii Perkalian Tripel Vektor

Definisi D.12. Perkalian tripel vektor didefinisikan sebagai

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right).$$

Proposisi D.13 (Ekspansi Perkalian Tripel). $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}$

Proposisi D.14 (Identitas Jacobi untuk Perkalian Silang). $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0$

[vi] Perkalian tripel skalar (klik di sini)
[vii] Perkalian tripel vektor (klik di sini)

E Daftar Pustaka

Hefferon, Jim. (2020). *Linear Algebra* (edisi ke-4). http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra.

Boyd, Stephen. Vandenberghe, Lieven (2018). *Introduction to Applied Linear Algebra; Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge: Cambridge University Press.

NCERT. Mathematics Part-II. https://ncert.nic.in/textbook.php?lemh2=4-7

Hague, B. (1946). *An Introduction To Vector Analysis For Physicists and Engineers*. London: Methuen & Co.

F Lampiran

Alfabet Yunani

$\mathrm{A}\alpha$ Alpha	$\mathrm{B}\beta$ Beta	$\Gamma\gamma$ Gamma	$\Delta\delta$ Delta	$\mathrm{E}\varepsilon$ Epsilon	$\mathrm{Z}\zeta$ Zeta
$\mathrm{H}\eta$ Eta	$\Theta\vartheta$ Theta	$\mathrm{I}\iota$ Iota	$\mathrm{K}\varkappa$ Kappa	$\Lambda\lambda$ Lambda	$\mathrm{M}\mu$ Mu
$\mathrm{N}\nu$ Nu	$\Xi\xi$ Xi	$\mathrm{O}o$ Omikron	$\Pi\pi$ Pi	$\mathrm{P}\rho$ Rho	$\Sigma\sigma/\varsigma$ Sigma
$\mathrm{T}\tau$ Tau	$\upsilon\Upsilon$ Upsilon	$\Phi\varphi$ Phi	$\mathrm{X}\chi$ Chi	$\Psi\psi$ Psi	$\Omega\omega$ Omega

Identitas-identitas Pemfaktoran

$$\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &= a^2 + b^2 \pm 2ab \\
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\
(x+a)(x+b) &= x^2 + (a+b)x + ab \\
(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\
(a \pm b)^3 &= a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b) \; = \; a^3 \pm b^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \\
a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\
a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \qquad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Aproksimasi Binomial. Jika $|x| << 1$ (baca: harga mutlak x jauh lebih kecil dari satu) dan $|nx| << 1$ maka $(1+x)^n \approx 1 + nx$