Pembinaan B-Bolt Fisika
Perambatan Ketidakpastian

(*Propagation of Uncertainty*)

Z. Nayaka Athadiansyah
SMA Negeri 3 Malang
18 Januari 2023

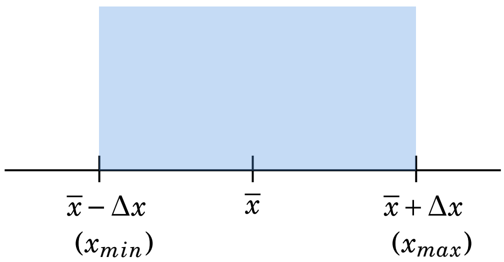
A Pendahuluan

Tidak ada pengukuran yang sempurna; selalu ada yang luput dari panca indera manusia. Beban yang ditimbang 20 kg bisa jadi massa sesungguhnya sedikit berbeda, misalnya 20,005 kg atau 19,990 kg. Sebagai bentuk pengakuan bahwa kemampuan manusia sangatlah terbatas, kita lazimnya melaporkan hasil pengukuran dengan menyatakan **ketidakpastian**nya. Ketidakpastian atau ralat pengukuran (*uncertainty*). Secara umum, kita melaporkan hasil pengukuran suatu kuantitas x sebagai

$$x = \overline{x} \pm \Delta x$$

di mana $\overline{x}$ adalah nilai hasil pengukuran terbaik yang mendekati nilai sebenarnya— kita menyebutnya **nilai benar**, sedangkan Δx adalah **ketidakpastian mutlak**nya.[i]

Hasil pengukuran bukanlah suatu nilai yang eksak, melainkan suatu rentang atau interval seperti pada ilustrasi berikut:



di mana x_{min} dan x_{max} secara berturut-turut adalah nilai terkecil dan nilai terbesar dalam rentang tersebut. Dari gambar, kita dapat melihat pula bahwa

$$\frac{x_{max} - x_{min}}{2} = \frac{(\cancel{\overline{x}} + \Delta x) - (\cancel{\overline{x}} - \Delta x)}{2} = \frac{2\Delta x}{2} = \Delta x \tag{1}$$

B Perambatan Ketidakpastian

Misalkan kita punya tiga kuantitas A, B, dan C:

$$A = \overline{A} \pm \Delta A$$
$$B = \overline{B} \pm \Delta B$$
$$C = \overline{C} \pm \Delta C$$

Bagaimana jika kita menjumlahkan, mengurangkan, mengalikan, dan membagi kuantitas-kuantitas tersebut? Apa yang akan terjadi dengan ketidakpastiannya?

[i]Ada yang menuliskan nilai benar sebagai x_0.

B.I Penjumlahan dan Pengurangan

Proposisi B.1. *Jika* $C = A \pm B$*, maka* $\Delta C = \Delta A + \Delta B$*.*

Bukti untuk Penjumlahan. Nilai maksimal yang mungkin untuk C adalah $C_{max} = (\overline{A} + \Delta A) + (\overline{B} + \Delta B)$, sedangkan nilai minimalnya adalah $C_{min} = (\overline{A} - \Delta A) + (\overline{B} - \Delta B)$.[ii] Ketidakpastian mutlaknya berdasarkan Persamaan (1) adalah

$$\begin{aligned}
\Delta C = \frac{C_{max} - C_{min}}{2} &= \frac{[(\overline{A} + \Delta A) + (\overline{B} + \Delta B)] - [(\overline{A} - \Delta A) + (\overline{B} - \Delta B)]}{2} \\
&= \frac{\cancel{\overline{A}} + \Delta A + \cancel{\overline{B}} + \Delta B - \cancel{\overline{A}} + \Delta A - \cancel{\overline{B}} + \Delta B}{2} \\
&= \frac{2\Delta A + 2\Delta B}{2} \\
&= \Delta A + \Delta B
\end{aligned}$$

□

Bukti untuk Pengurangan. Nilai maksimum yang mungkin untuk C adalah $C_{max} = (\overline{A} + \Delta A) - (\overline{B} - \Delta B)$, sedangkan nilai minimumnya adalah $C_{min} = (\overline{A} - \Delta A) - (\overline{B} + \Delta B)$.[iii] Ketidakpastian mutlaknya berdasarkan Persamaan (1) adalah

$$\begin{aligned}
\Delta C = \frac{C_{max} - C_{min}}{2} &= \frac{[(\overline{A} + \Delta A) - (\overline{B} - \Delta B)] - [(\overline{A} - \Delta A) - (\overline{B} + \Delta B)]}{2} \\
&= \frac{\cancel{\overline{A}} + \Delta A - \cancel{\overline{B}} + \Delta B - \cancel{\overline{A}} + \Delta A + \cancel{\overline{B}} + \Delta B}{2} \\
&= \frac{2\Delta A + 2\Delta B}{2} \\
&= \Delta A + \Delta B
\end{aligned}$$

□

B.II Perkalian dan Pembagian

Proposisi B.2. *Jika* $C = A \cdot B$*, maka* $\dfrac{\Delta C}{\overline{C}} = \dfrac{\Delta A}{\overline{A}} + \dfrac{\Delta B}{\overline{B}}$.

Bukti. Nilai maksimum yang mungkin untuk C adalah $C_{max} = (\overline{A} + \Delta A)(\overline{B} + \Delta B)$, sedangkan nilai minimumnya adalah $C_{min} = (\overline{A} - \Delta A)(\overline{B} - \Delta B)$.[iv] Ketidakpastian mutlaknya berdasarkan Persamaan (1) adalah

$$\begin{aligned}
\Delta C = \frac{C_{max} - C_{min}}{2} &= \frac{[(\overline{A} + \Delta A)(\overline{B} + \Delta B)] - [(\overline{A} - \Delta A)(\overline{B} - \Delta B)]}{2} \\
&= \frac{[\cancel{\overline{AB}} + \overline{A}\Delta B + \overline{B}\Delta A + \cancel{\Delta A \Delta B}] - [\cancel{\overline{AB}} - \overline{A}\Delta B - \overline{B}\Delta A + \cancel{\Delta A \Delta B}]}{} \\
&= \frac{2A\Delta B + 2B\Delta A}{2} \\
\Delta C &= \overline{A}\Delta B + \overline{B}\Delta A
\end{aligned}$$

Bagi kedua ruas dengan $\overline{C} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, kita dapatkan

---

[ii]Pandang $\overline{A} + \Delta A$ sebagai bilangan yang "besar," sedangkan $\overline{A} - \Delta A$ adalah "kecil" (karena dikurangi, ketimbang ditambah ΔA). Terapkan pandangan yang sama bagi kuantitas B dan C. Nilai $C = A + B$ akan maksimal ketika A dan B keduanya "besar", dan berlaku pula sebaliknya.

[iii]Sesuatu yang "besar" dikurangi sesuatu yang "kecil" akan tetap menjadi bilangan yang masih cukup besar, misalnya $1000 - 2 = 998$. Adapun sesuatu yang "kecil" dikurangi sesuatu yang "besar" akan jadi bilangan yang kecil.

[iv]Bilangan yang "besar" dikalikan bilangan yang juga "besar" akan menghasilkan bilangan yang jauh lebih besar, dan sebaliknya.

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\cancel{\overline{A}}\Delta B}{\cancel{\overline{A}} \cdot \overline{B}} + \frac{\cancel{\overline{B}}\Delta A}{\overline{A} \cdot \cancel{\overline{B}}}$$
$$= \frac{\Delta A}{\overline{A}} + \frac{\Delta B}{\overline{B}} \qquad \square$$

Proposisi B.3. *Jika $C = A \div B$, maka* $\frac{\Delta C}{\overline{C}} = \frac{\Delta A}{\overline{A}} + \frac{\Delta B}{\overline{B}}$.

Bukti. Nilai maksimum untuk C adalah [v]

$$C_{max} = \frac{\overline{A} + \Delta A}{\overline{B} - \Delta B}$$

$$= \frac{\overline{A}\left(1 + \frac{\Delta A}{\overline{A}}\right)}{\overline{B}\left(1 - \frac{\Delta B}{\overline{B}}\right)} = \overline{C}\left(1 + \frac{\Delta A}{\overline{A}}\right)\left(1 - \frac{\Delta B}{\overline{B}}\right)^{-1} = \overline{C}\left(1 + \frac{\Delta A}{\overline{A}}\right)\left(1 + \frac{\Delta B}{\overline{B}}\right)$$

$$= \overline{C}\left(1 + \frac{\Delta A}{\overline{A}} + \frac{\Delta B}{\overline{B}} + \underbrace{\frac{\Delta A \Delta B}{\overline{AB}}}_{\text{diabaikan}}\right)$$

$$= \overline{C}\left(1 + \left(\frac{\Delta A}{\overline{A}} + \frac{\Delta B}{\overline{B}}\right)\right)$$

(karena $\overline{C} = \frac{\overline{A}}{\overline{B}}$ dan kita menggunakan aproksimasi binomial di sini (lihat lampiran)). Adapun nilai minimumnya adalah[vi]

$$C_{min} = \frac{\overline{A} - \Delta A}{\overline{B} + \Delta B}$$

$$= \frac{\overline{A}\left(1 - \frac{\Delta A}{\overline{A}}\right)}{\overline{B}\left(1 + \frac{\Delta B}{\overline{B}}\right)} = \overline{C}\left(1 - \frac{\Delta A}{\overline{A}}\right)\left(1 + \frac{\Delta B}{\overline{B}}\right)^{-1} = \overline{C}\left(1 - \frac{\Delta A}{\overline{A}}\right)\left(1 - \frac{\Delta B}{\overline{B}}\right)$$

$$= \overline{C}\left(1 - \frac{\Delta A}{\overline{A}} - \frac{\Delta B}{\overline{B}} + \underbrace{\frac{\Delta A \Delta B}{\overline{AB}}}_{\text{diabaikan}}\right)$$

$$= \overline{C}\left(1 - \left(\frac{\Delta A}{\overline{A}} + \frac{\Delta B}{\overline{B}}\right)\right)$$

---

[v] Suatu pecahan akan bernilai "besar" jika pembilangnya "besar" dan penyebutnya "kecil." Ambil contoh $\frac{1.000}{0,001}$.

[vi] Suatu pecahan bernilai "kecil" apabila pembilangnya "kecil" dan penyebutnya "besar," misalnya $\frac{0,001}{1.000}$

Ketidakpastian mutlaknya berdasarkan Persamaan (1) adalah

$$\Delta C = \frac{C_{max} - C_{min}}{2} = \frac{\left[\overline{C}\left(1 + \left(\frac{\Delta A}{\overline{A}} + \frac{\Delta B}{\overline{B}}\right)\right)\right] - \left[\overline{C}\left(1 - \left(\frac{\Delta A}{\overline{A}} + \frac{\Delta B}{\overline{B}}\right)\right)\right]}{2}$$

$$= \frac{\cancel{1-1} + \left(\frac{\Delta A}{\overline{A}} + \frac{\Delta B}{\overline{B}}\right) + \left(\frac{\Delta A}{\overline{A}} + \frac{\Delta B}{\overline{B}}\right)}{2}\,\overline{C}$$

$$\Delta C = \frac{2\frac{\Delta A}{\overline{A}} + 2\frac{\Delta B}{\overline{B}}}{2}\,\overline{C}$$

$$\frac{\Delta C}{\overline{C}} = \frac{\Delta A}{\overline{A}} + \frac{\Delta B}{\overline{B}}$$

□

NB: Kenapa kita mengabaikan suku $\frac{\Delta A \Delta B}{\overline{AB}}$? Karena kita menganggap ketidakpastian mutlak adalah bilangan yang kecil (< 1), atau setidaknya jauh lebih kecil dari nilai benarnya, sehingga jika mereka dibagi oleh $\overline{AB}$, maka nilainya akan menjadi jauh lebih kecil lagi (anggap saja mendekati 0). Dengan demikian, nilainya tidak signifikan dan bisa diabaikan.

B.III Perpangkatan

Proposisi B.4. *Jika $C = A^n$, maka* $\frac{\Delta C}{\overline{C}} = |n|\frac{\Delta A}{\overline{A}}$

Bukti. Silakan buktikan sendiri dengan menggunakan perambatan ketidapastian untuk perkalian (Proposisi B.2). Ingat bahwa memangkatkan suatu bilangan dengan bilangan asli n berarti mengalikan bilangan tersebut dengan dirinya sendiri sebanyak n kali. □

B.IV Mengalikan dengan Koefisien

Proposisi B.5. *Jika $C = kA$ di mana k adalah sembarang bilangan real, maka $\Delta C = |k|\Delta A$.*

Bukti. Silakan buktikan sendiri dengan menggunakan perambatan ketidapastian untuk penjumlahan (Proposisi B.1). Ingat bahwa mengalikan suatu bilangan dengan bilangan asli k berarti menjumlahkan bilangan tersebut dengan dirinya sendiri sebanyak k kali. □

C Catatan

Kalau Anda perhatikan baik-baik, perhitungan ketidakpastian mutlak yang kita lakukan berdasarkan persamaan (1) sangat ekstrem: kita mengasumsikan nilai benar dari x melenceng sejauh Δx, entah itu ke kiri atau ke kanan.

Dalam praktiknya, hal ini tidak selalu terjadi sehingga perhitungan ketidakpastian yang kita lakukan bisa dianggap terlalu pesimis, mengasumsikan kasus terburuk. Hal ini baru mungkin terjadi jika pengukuran dari tiap kuantitas saling berkorelasi dan memengaruhi satu sama lain.

Jadi, bagaimana cara yang lebih akurat? Kita menggunakan suatu teknik dalam statistika yang disebut akar-jumlah-kuadrat (RSS, *root sum square*). Sudah jelas dari namanya, ketimbang kita menjumlahkan tiap suku, kita mengkuadratkannya dahulu baru menjumlahkannya, lalu mengakarkan hasil jumlah tadi. Sebagai contoh, untuk penjumlahan telah kita ketahui bahwa

$$\Delta C = \Delta A + \Delta B$$

Dalam metode baru kita, persamaannya akan menjadi

$$\Delta C = \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2}$$

Metode ini juga bisa diterapkan untuk perhitungan perambatan ketidakpastian yang lainnya.

D Daftar Pustaka

Ishafit. (2017). Bab 3: "Analisis Ralat" dalam *Materi Kuliah Eksperimen Fisika*. Yogyakarta: Universitas Ahmad Dahlan.

Taylor, John. (1997). *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements* (edisi ke-2). Sausalito, CA: University Science Books.

E Lampiran

Alfabet Yunani

Αα	Ββ	Γγ	Δδ	Εε	Ζζ
Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta
Ηη	Θϑ	Ιι	Κϰ	Λλ	Μμ
Eta	Theta	Iota	Kappa	Lambda	Mu
Νν	Ξξ	Οο	Ππ	Ρρ	Σσ/ς
Nu	Xi	Omikron	Pi	Rho	Sigma
Ττ	υϒ	Φφ	Χχ	Ψψ	Ωω
Tau	Upsilon	Phi	Chi	Psi	Omega

Identitas-identitas Pemfaktoran

$$
\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &= a^2 + b^2 \pm 2ab \\
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\
(x+a)(x+b) &= x^2 + (a+b)x + ab \\
(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\
(a \pm b)^3 &= a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b) = a^3 \pm b^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \\
a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\
a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \qquad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Aproksimasi Binomial. Jika $|x| << 1$ (baca: harga mutlak x jauh lebih kecil dari satu) dan $|nx| << 1$ maka $(1+x)^n \approx 1 + nx$