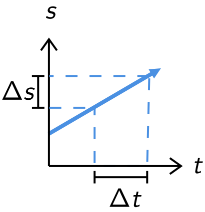
Kalkulus Dasar

Z. Nayaka Athadiansyah

SMAN 3 Malang

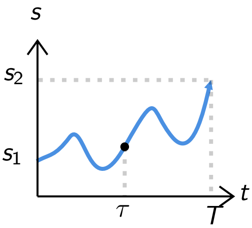
Pembinaan Intensif OSN-K, 13 Maret 2023

Permasalahan Dasar

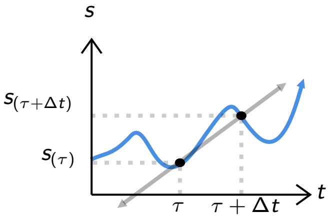


$$m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

Jadi, gradien dari grafik s-t adalah kecepatan. Bagaimana jika grafiknya seperti ini?



Solusinya:



Pilih suatu titik lain pada rentang waktu Δt. Gradien dari garis yang menghubungkan kedua titik adalah kecepatan rata-rata pada rentang waktu tersebut, yakni

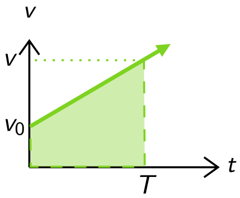
$$\overline{v} = \frac{S_{(\tau+\Delta t)} - S_{(\tau)}}{\Delta t} \tag{A.1}$$

Jika Δt kita perkecil hingga mendekati nol ($\Delta t \to 0$), kedua titik akan saling mendekat hingga berimpitan, memberikan kita kecepatan pada waktu τ. Secara matematis, kita menuliskan kecepatannya sebagai

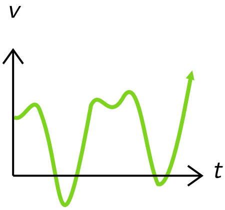
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S_{(\tau+\Delta t)} - S_{(\tau)}}{\Delta t} \tag{A.2}$$

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{ds}{dt}$$

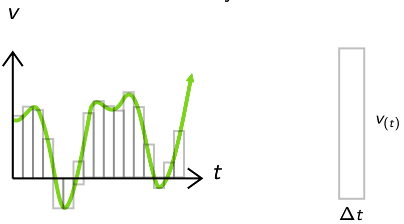
Permasalahan Dasar



Luas daerah di bawah grafik tersebut adalah $(v + v_0)t/2$, yang melibatkan perkalian antara besaran kecepatan dengan waktu, membuatnya setara dengan perpindahan. Jadi, luas daerah di bawah grafik v-t adalah perpindahan. Bagaimana menghitung luas grafik v-t berikut?



Solusinya:



Kita aproksimasikan luas daerah di bawah grafik tersebut dengan persegi panjang yang lebarnya Δt dan tingginya sama dengan kecepatan pada waktu tertentu, $v_{(t)}$. Dengan demikian, luas daerah tersebut (S) adalah

$$S \approx \sum_{0}^{t} v_{(t)} \Delta t \tag{A.3}$$

Seperti sebelumnya, jika kita buat Δt sekecil mungkin ($\Delta t \to 0$) maka aproksimasi kita makin mendekati nilai sebenarnya. Secara matematis, kita menuliskan luas tersebut sebagai

$$S = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\sum_{0}^{t} v_{(t)} \Delta t \right) = \int_{0}^{t} v_{(t)} dt \tag{A.4}$$

Turunan

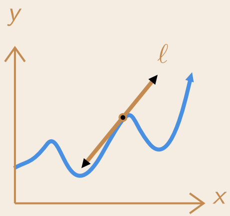
Turunan

Turunan dari suatu fungsi $f(x)$ adalah suatu fungsi lain, $f'(x)$, yang memberikan gradien garis singgung pada grafik fungsi tersebut. Secara matematis, turunan dari suatu fungsi $f(x)$ didefinisikan sebagai

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{B.1}$$

Adapun operator $\dfrac{d}{dx}$ adalah operator yang menurunkan suatu fungsi terhadap x.

Grafik



Example (Turunan dari $f(x) = 3x^2$)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x)^2 - 3x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{3x^2} + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - \cancel{3x^2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x) = 6x \end{aligned}$$

Dapat kita tuliskan juga bahwa

$$\frac{d}{dx}(3x^2) = 6x \qquad \square$$

Beberapa Aturan Turunan

Teorema (Aturan Pangkat)

Jika $y = ax^n$ *maka* $\dfrac{dy}{dx} = nax^{n-1}$.

Teorema (Aturan Perkalian)

Jika $y = f(x) \cdot g(x)$ *maka* $\dfrac{dy}{dx} = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.

Example

$$y = \underbrace{(2x^3+1)}_{f(x)}\underbrace{(1-x)}_{g(x)} \implies \frac{dy}{dx} = (2x^3+1)(-1) + (6x^2)(1-x)$$

Teorema (Aturan Pembagian)

Jika $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *maka* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

Example

$$y = \frac{\overbrace{2x^3 + 1}^{f(x)}}{\underbrace{1 - x}_{g(x)}} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{(1-x)(6x^2) - (2x^3+1)(-1)}{(1-x)^2}$$

Teorema (Aturan Rantai)

Jika $y = f(g(x))$ *maka* $\dfrac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Example

$$y = (10x^5 + 12)^{11} \implies \frac{dy}{dx} = 11(10x^5 + 12)^{10} \cdot 50x^4$$

dengan $f(x) = x^{11}$ dan $g(x) = 10x^5 + 12$.

Integral

Integral

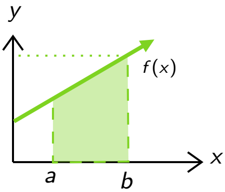
Integral dari suatu fungsi $f(x)$ adalah suatu fungsi lain, $F(x)$, yang memberikan luas di bawah grafik fungsi tersebut. Berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus, integral adalah kebalikan operasi turunan sehingga disebut **anti-turunan**. Dengan demikian,

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x) \tag{C.1}$$

Integral tanpa batas atas dan batas bawah disebut **integral tak tentu**. Jika $f(x)$ adalah turunan dari $F(x)$, maka **integral tentu** didefinisikan sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \tag{C.2}$$

di mana a dan b adalah batas bawah dan batas atasnya. Secara geometris, ini menggambarkan luas daerah di bawah $f(x)$ dari $x = a$ hingga $x = b$:



Example (Integral dari $3t^2$)

Fungsi apa yang jika diturunkan jadi $3t^2$? Dengan menebak-nebak, kita bisa amati bahwa $\frac{d}{dx}\left(t^3\right) = 3t^2$, sehingga t^3 memenuhi. Akan tetapi, $t^3 + 5$, $t^3 - 100$, ataupun t^3 ditambah bilangan apapun akan menghasilkan $3t^2$ ketika diturunkan. Atas dasar tersebut, kita tuliskan

$$\int 3t^2 dt = t^3 + C$$

di mana C adalah sembarang bilangan real.

Teorema (Aturan Pangkat)

Jika $\int ax^n dx = \frac{1}{n+1} ax^{n+1}$.

Terima Kasih